

探討小五學童以線段圖為表徵進行解題的知識結構

洪御慧

南投縣名間國小

comet.snow@msa.hinet.net

易正明

台中教育大學數學系

yih@mail.ntcu.edu.tw

林原宏

台中教育大學數學系

lyh@mail.ntcu.edu.tw

摘要

本研究旨在了解小五學童在線段圖的表徵形式下，關於對等問題、分數的運算之解題表現。研究對象共計六十七人。研究工具採用自編的「線段圖表徵測驗」，並以SPSS等軟體進行資料分析，透過徑路搜尋的方法，分析學生以線段圖為表徵解題的知識結構。

歸納資料分析結果如下：

- (一)不同解題能力組別的學生，其知識結構圖形各有不同核心概念。
- (二)利用群集分析方法分成的七個群組，各群知識結構圖有極高相似度，可見利用群集分析方法能將不同知識結構的學童有效的分組。
- (三)本研究可提供教師編輯國小線段圖表徵之教學流程及素材之參考。

關鍵字：知識結構、徑路搜尋、線段圖

一、研究動機

九年一貫數學領域主軸所強調的抽象化能力，始於能運用符號、記號、模型、圖形或其他數學語言、清楚傳達量化、邏輯關係(教育部，2003)，期許兒童培養抽象化能力來協助解決生活中的數學問題。自古以來，從先人所遺留的足跡中發現圖形的存在早於文字，因此，「圖像表徵」一直是人類最為普遍與方便的訊息傳遞。

參考文獻資料、研究者的教學經驗及自己成長的學習過程中，深切的體會使用線段圖來表現文字的情境時，可以幫助問題情境中的數量關係更加的具體化，因此當學童可以培養以等比例的線段圖來表現對等關係或分數問題中的數量時(陳竹村 林淑君 陳俊瑜, 1992)，可把計數單位分割到最小單位量，發展出新的計數單位，進一步對分數問題具體操作，得以明確掌握數量間的相互關係。

為了診斷、分析出學生在解題中以線段圖表徵的錯誤概念與歷程，余民寧、林曉芳、蔡佳燕(2001)研究發現，利用徑路搜尋(pathfinder)，所繪製出來的知識結構圖，可以針對學習缺陷之處提出補救措施，可以改進傳統紙筆評量方法的不足。並透過集群分析(cluster analysis)的客觀度量，將學生進行分組，對照徑路搜尋所繪製出來的線段圖表徵知識結構圖，以利教學者進行有效的相關教學與補救措施，如此一

來，未來兒童在遭遇分數問題，就可以在最小計數單位的整數邏輯思考中逐漸澄清，再也無需感到陌生與畏懼。

二、參考文獻

徑路搜尋是 1985 年由美國新墨西哥州立大學 R. W. Schvaneveldt 教授領導的團隊開發出來的知識結構分析方法，可用來評量、表徵、分析學習者在某個學習領域所習得的知識結構。其軟體稱為知識網路組織工具(Knowledge Network Organizing Tool，簡稱 KNOT)，用以分析知識結構的架構(Schvaneveldt, 1990)，配合因素分析及集群分析，可以讓使用徑路搜尋所呈現個別化的結果(Goldsmith et al., 1991)。

透過學童在分數概念學習成就測驗表現所得的知識結構圖的變化，大部分的小五學童以已知單位量概念為核心概念，換言之學好單位量概念可以幫助國小五年級學童學習其他分數的子概念。控制組的實例三學生後測結果發現單位量概念之間的精確鏈結不見了，概念與概念該有的鏈結關係卻不存在，推論實例三學生的單位量概念其實並不穩固，也就是說在單位量概念的學習發生了問題，教師可配合概念教學策略對五年級學童加強單位量概念的補救教學(李映勳, 2006)。

集群分析為多變量分析的一種方法，本研究利用的集群分析方法是 K 平均數法(K-means methods)，將所有觀察值分成 K 群，然後依各觀察值到中心點距離遠近重新移動，使各觀察值將移至最靠近的群體中，這樣不斷重複，直到不能再重新分派達到收斂為止。所謂知識結構(knowledge structure)，係指學習者透過內在的認知歷程，將數個單一概念組合之後所形成的組織。王啟章配合集群分析法的有效分群，找出國小五年級學童分數的迷思概念的知識

結構圖，針對分數概念中的等分、簡單分數概念及單位量概念，採用概念教學策略，進行「準實驗設計」的實驗教學，經過不同的分數概念課程後，實驗組學生在「單位量概念」有明顯進步，並經單因子共變數分析與控制組達到顯著差異(王啟章, 2006)。

林惠真在探討國小五年級學生在解不同題目表徵型式(文字題、線段圖題、圖畫題)的解題表現，研究所獲致的結果為國小五年級學生在不同題目徵型式的解題表現上，彼此之間都存在著顯著的差異。其中，學生在「線段圖題」上的解題表現顯著優於「文字題」和「圖畫題」，又線段圖題與圖畫題比文字題較能夠幫助中、低數學能力組的學生將算式正確列出(林惠真, 2005)。

基於文獻資料、研究者的教學經驗及自己成長的學習過程中，深切的體會使用線段圖來表現文字的情境時，可以幫助問題情境中的數量關係更加的具體化，因此以線段圖的表徵形式下，關於對等問題、分數的運算來觀察學生的解題表現，並透過徑路搜尋的方法，分析學生以線段圖為表徵解題的知識結構。

三、研究方法

(一) 研究對象

本研究以自編試題對兩班五年級學生進行施測，受測學童共有 67 位，對於試題中的線段圖表徵、對等關係、分數運算部分，尚未有相關的課程學習經驗。

(二) 研究工具

1. 自編研究測驗試題：主要參考 82 年線段圖教學的教材安排，配合九年一貫數學領域的能力指標與課程內容，考量五年級學童認知發展的程度。建立雙向細目表，係將測驗所要測量的行為目標列在橫列，而把教學目標排在縱列(王文科, 2002)。
2. 以線段圖為表徵的測驗包括之數學概念

及認知層次，參見「國小五年級學生在以線段圖為表徵型式的解題表現測驗評量」之雙向細目表，如下表 1 所示。

表 1 線段圖表徵的解題測驗之雙向細目表

	知識	理解	應用	合計
轉換為單位分數的對等關係	1	2	21	4
可共測量的倍數關係			4	1
了解每一線段單位所代表的數量	5、11	6、7、8		5
察覺兩異分母分數的公共單位分數			12、13、14、15、16、17	6
異分母的加減			9、10	2
分數的乘法			22	1
分數的除法			18、19、20、23	4
合計	2	6	15	23

(三) 試題分析

試題分析針對「以線段圖為表徵型式的解題表現測驗評量」分析其信度與效度。

1. 信度

施測結果經 SPSS 的統計分析，及各個試題的難度與鑑別度分析，刪除不當題目共 3 題，試題題數刪減為 23 題，本自編數學學習成就測驗試題題本的內部一致性信度，Cronbach α 係數可達 .880。

2. 適合度考驗

表 2 為以線段圖為表徵的解題表現測驗評量，其 KMO 與 Bartlett 檢定，KMO 值為 .629，球形檢定之顯著性 $0.000 < 0.05$ ，

具顯著性，表示本測驗適合進行因素分析。

表 2：線段圖為表徵的解題測驗評量

KMO 與 Bartlett 檢定

Kaiser-Meyer-Olkin 取樣適量適切性量數	.629
Bartlett 球形檢定 (近似卡方分配)	876.715***

*** $p < .001$

3. 主成分因素分析

本研究依理論架構，將「以線段圖為表徵型式的解題表現」測驗評量組成成份訂為「轉換成為單位分數的對等關係」、「可共測量的倍數關係」、「了解每一線段單位所代表的數量」、「察覺兩異分母分數的公共單位分數」、「異分母的加減」、「分數的乘法」及「分數的除法」的類型，並根據這七個類型來編擬試題。主成分因素分析取特徵值大於 1，萃取出七個成份，總解釋變異量達 68.87%，解釋量達 50% 屬較佳試題，本測驗工具已屬良好試題。本測驗工具高達 87% 的試題皆為良好或優良試題。

4. 求出試題答對機率與能力值

以學生原始作答資料矩陣(「1」表示答對，「0」表示答錯)，利用試題反應理論的電腦軟體程式 BILOG，求出第 k 位學生的能力值 θ_k ，以及試題鑑別度參數 a_i ，試題難度參數 b_i ，猜測參數 c_i 。研究者分別以不同的試題反應模式估計相關參數，其中以三參數試題反應模式所得結果為最佳。代入試題反應理論中三參數對數形模式，求出每位學生每個試題的答對率 $P_i(\theta_k)$ 。三參數對數形模式數學公式如下所示：

$$P_i(\theta_k) = c_i + (1 - c_i) \frac{1}{1 + e^{-Da_i(\theta_k - b_i)}}, \quad i = 1, 2, 3, \dots, n$$

其中， D 為常數，其值為 1.7。各群人數及平均能力值 θ 如表 3 所示。

表 3 集群分析分群情形及相關資料分析表

	人數	平均 原始 分數	人數百 分比%	「轉換為 單位分數 的對等關 係」的平 均能力值 θ	「可共測量 的倍數關係」 的平均能力 值 θ	「了解每 一線段單 位所代表 的數量」 的平均能 力值 θ	「察覺兩 異分母分 數的公共 單位分 數」的平 均能力值 θ	「異分母 的加減」 的平均能 力值 θ	「分數的 乘法」的 平均能力 值 θ	「分數的除 法」的平均 能力值 θ
第一群	6	17.8	8.96	1.20	0.14	-0.29	-0.09	-1.73	1.96	0.41
第二群	4	13.5	5.97	0.26	-0.03	-0.93	0.95	1.48	0.13	1.61
第三群	11	9.82	16.42	-0.21	-0.19	-1.48	-0.57	-0.17	-0.55	-0.15
第四群	12	5.25	17.91	-1.18	0.03	0.67	-0.90	0.48	0.68	0.10
第五群	17		25.37	0.01	-0.40	0.64	0.49	-0.44	-0.79	0.39
		11.4								
第六群	4	19.5	5.97	1.57	2.80	0.57	-1.16	0.64	-1.14	-0.14
第七群	13	12.5	19.40	0.13	-0.26	0.05	0.78	0.43	0.28	-1.11

四、研究結果

利用知識結構網路組織工具 (knowledge network organizing tool, 簡稱 KNOT) 來做結果分析。以徑路搜尋及集群分析探討線段圖表徵解題的知識結構圖。

(一) 各群人數及平均能力值 θ

根據這七個因素來編擬試題，再以這七個變數為指標求出因素分數 (factor score) 來進行集群分析。集群分析部分採 k 平均數法，多次嘗試分群個數，考慮收斂及各群學生數目的合理性，將樣本分為七個集群，其各群人數及平均能力值 θ 參見表 3。由表 3 各群平均原始分數及平均能力值 θ 發現，得分最高者為第六群，中等表現的代表群是第五群，得分最低群為第四群。

(二) 知識結構圖之分析

1. 第六群

第六群是原始得分表現最佳之一群，共計有 4 人。其中發現各實例知識結構圖鏈結方式都可將知識結構圖中二十三個概念分成四區，第一區為：概念 6、7、8、12、16、13；第二區為：概念 18、1、9、2、11、15、10；第三區為：概念 23、5、3、17、20、4；第四區為：概念 14、21、19、22，將符合上述特性的知識結構圖茲舉例如圖 1。

各實例之概念鏈結雖然沒有完全精確，但都位於該區，並能從學生的知識結構圖發現，當學生以線段圖為解題表徵進行解題活動時，皆先以線段單位量的認知為基礎鏈結概念，才能進一步產生單位分數間的對等活動，等這兩種基礎概念穩固後，最後才可有效建立公共單位分數的概念，經由對等活動學習後，才能進行分數

乘除運算。對照原始作答情形，平均答對率為 .85，已達精熟程度，針對此群學童教師可進行充實活動。

1	單位分數的對等	13	公共單位分數
2	單位分數的對等	14	公共單位分數
3	單位分數的對等	15	公共單位分數
4	可共測量的倍數	16	公共單位分數
5	線段單位量	17	公共單位分數
6	線段單位量	18	分數的除法
7	線段單位量	19	分數的除法
8	線段單位量	20	分數的除法
9	異分母的加減	21	單位分數的對等
10	異分母的加減	22	分數的乘法
11	線段單位量	23	分數的除法
12	公共單位分數		

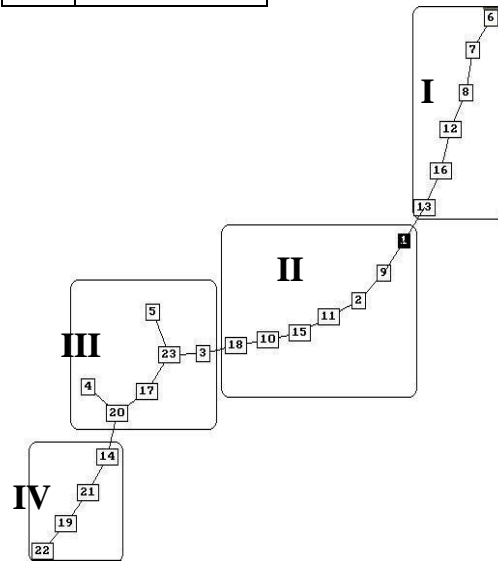


圖 1 第六群實例一知識結構圖

2. 第五群

第五群在原始得分屬於表現中等的代表群，共計有十七人，對照原始作答情形，平均答對率為 .50。此群知識結構圖主要以概念 23 和概念 18 為核心，發展出兩種類型的知識結構圖，而此可知分數的除法概念的建立，對於以線段圖為表徵解題的中等學生群而言，具有關鍵的影響性。

其中以概念 23 為核心發展的共有 11 人，皆位於第五群的高分表現部分，知識結構圖相似度極高，舉例如圖 2，雖然中等學生的發展未如高分群鏈結情形的清晰，但是在線段單位量和對等關係的基礎概念都和分數除法做了清楚的鏈結，顯示若能建立線段單位量和對等關係的概念，對於更上一層分數乘除的運算，通過率便越高。

在以概念 18 為核心發展的知識結構圖中，舉例如圖 3。學童作答情形不如以概念 23 為核心發展的學童理想，得分狀況偏低，分析試題後發現，概念 23 的分數除法須具有線段單位量的概念後，才能順利發展出為對等關係和分數的運用的知識結構圖，因而活用層次高於概念 18 的分數除法。由以上的差異，可看出若是學童對基本線段單位量概念混淆或不清楚，易造成鏈結錯誤，更無法發展出流暢的知識結構，教學者若能針對中分群的學生，在鏈結中心的對等關係和分數運用概念上，加以澄清與加強，對於整體知識結構圖上的學習，學生應可更容易發展出流暢的線段圖解題能力。

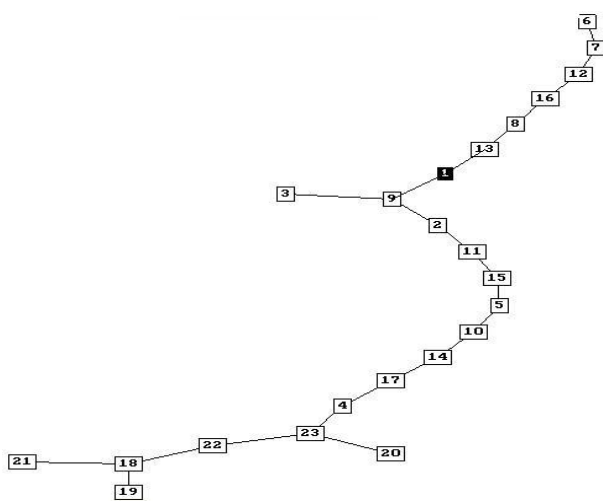


圖 2 第五群實例一知識結構圖

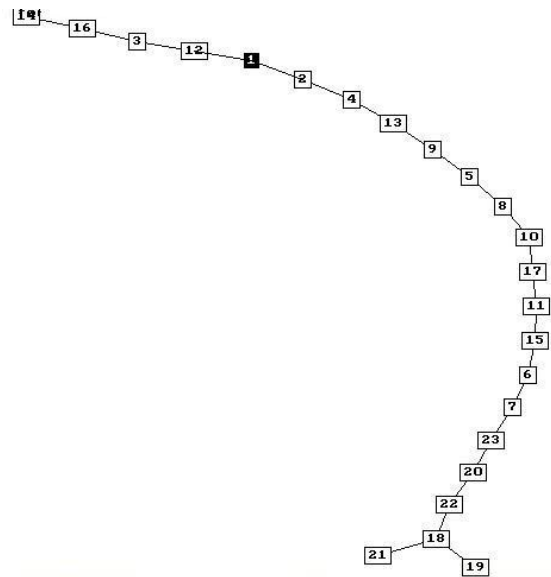


圖 3 第五群實例二知識結構圖

3. 第四群

第四群在原始得分是較低一群，共計有十二人，觀察各實例知識結構圖，發現整組皆以概念 18 為核心，鏈結起概念 19 和概念 21。其中原始得分在 4 分以下計有七人，可將知識結構圖中二十三個概念分成四區，第一區為：概念 23、20、22、18、19、21；第二區為：概念 7、15、6、11、17、8；第三區為：概念 9、10、5、13；第四區為：概念 1、4、2、12、16、3、14；將符合上述特性的知識結構圖茲舉例如圖 4 和圖 5。

其餘 5 人的原始得分為 7 至 11 分，卻呈現出不同的變化的知識結構圖，舉例如圖 7 和圖 8。顯示第四群組內較低分的結構圖，分布較趨於一致性。對照原始作答情形，平均答對率為.23，作答情形極為不理想，可能如圖 6 和圖 7 的作答情況相似，並無清楚的概念鏈結區產生，缺乏線段單位量的基本概念，乘除法和單位分數的概念全部混雜在一片。

由低分群的知識結構圖可發現，在低分群學童的線段圖學習上，是以第四區的線段單位量和單位分數的對等概念為基礎的學習概念起點，開始發展，進而發展第

三區的以異分數的加減為主的概念，接者，進入第二區公共單位分數的學習，最後才到達第一區分數乘除的運算。因而教師在進行補救教學上，可從線段單位量和單位分數的對等概念開始補救，等此概念學習穩固後，循序漸進，才可以一步一步進行公共單位分數的活動，最後才能順利的發展出第一區的概念結構，成功的建立學童的分數運算概念。

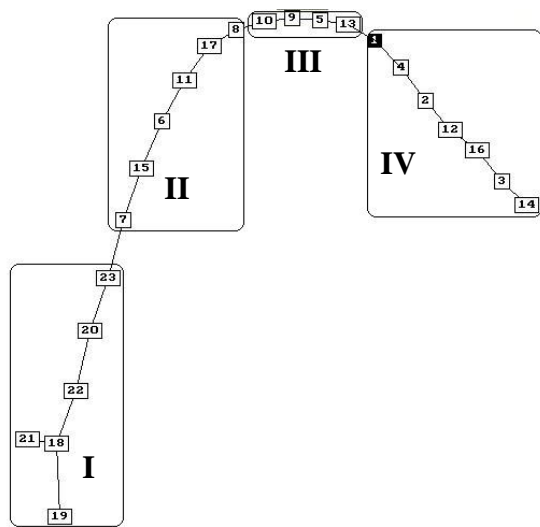


圖 4 第四群實例一知識結構圖

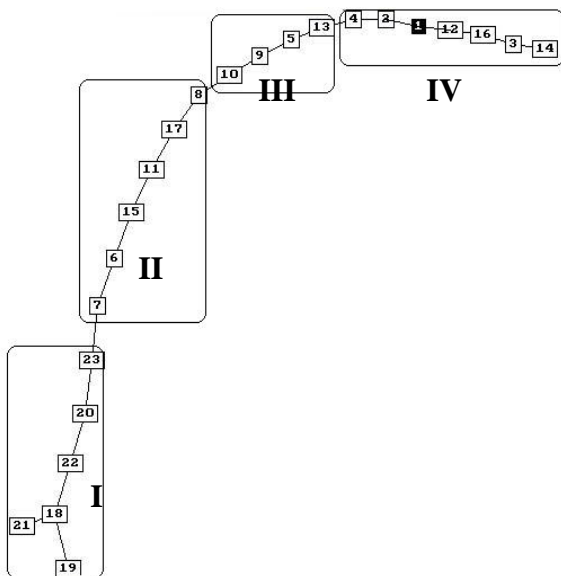


圖 5 第四群實例二知識結構圖

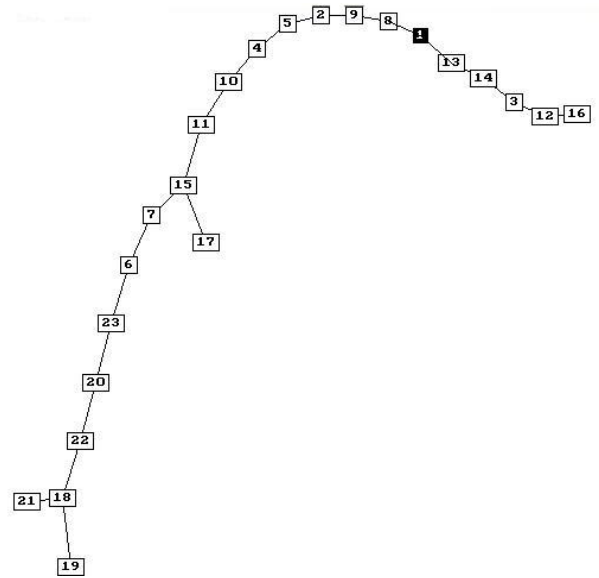


圖 6 第四群實例三知識結構圖

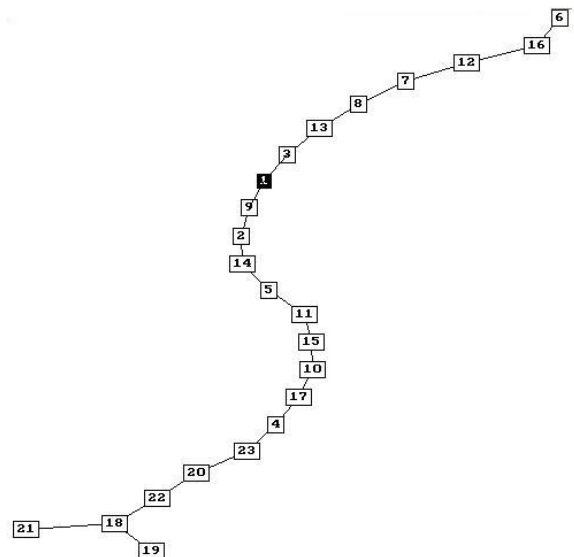


圖 7 第四群實例四知識結構圖

五、結論與建議

本研究發現利用集群分析方法能將受試者有效分群，讓使用徑路搜尋所呈現個別化的結果(Goldsmith et al., 1991)，趨向同一類群的一致特性，各群相似性指數達顯著差異，且各群知識結構圖有極高的相似性。高分群學童對知識結構圖概念的走向具有一致性，教師可進行充實活動，往

上發展。中分群的錯誤類型大多位於同一區，教師可對此錯誤概念的鏈結區，進行有效的補教教學，並能從不同的核心概念著手加強各種情況，讓學童的學習更流暢。低分群的概念與解題正確率偏低，基本的各種概念仍屬混淆，教師需多利用課外時間從基礎的概念區先行補救。

礙於人力、時間等因素，本研究僅以南投縣某國小學生 67 人為樣本作探討，對於未來研究方向的建議，可以兼採質的研究，透過實驗教學、行動研究和晤談，可以幫助瞭解學童在以線段圖為表徵解題數學能力的發展，如此可以更瞭解學生是如何思考問題、形成表徵、採用策略。而本研究僅依紙筆測驗所得知的結果，來探討學童在以線段圖為表徵解題的知識結構。未來研究對象可推展至各縣市國小，進行抽樣調查，增加樣本人數及異質性，使得研究結果更具準確性及代表性。

參考文獻

- [1] 王文科，教育研究法，第四版，台北：五南，1995。
- [2] 余民寧、林曉芳、蔡佳燕，“國小學生數學知識結構認知診斷評量之研究”，國立政治大學教育與心理研究，第 24 期，pp. 263-302，2001。
- [3] 王啟章、易正明、李映勳、陳進春，”國小學童分數概念的實驗教學，2005，數學考卷編製暨評析研討會，pp. 500-525，2006。
- [4] 李映勳、易正明、王啟章、陳進春，”透過分數概念測驗建構五年級知識結構”，2005 數學考卷編製暨評析研討會，pp. 526-556，2006。
- [5] 林惠真，“國小五年級學生在不同題目表徵型式下對分數加減之解題情形”，第二十一屆科學教育學術研討會，2005。
- [6] 國立編譯館，數學教學指引，第九、十冊，1991。
- [7] 教育部，九年一貫數學學習領域課程綱要，2003。
- [8] 陳竹村 林淑君 陳俊瑜，國小數學教材分析-比(含線段圖)，1992。
- [9] Goldsmith, T. E., Johnson, P. J. and Action, W. H, “Assessing Structural Knowledge”，Journal of Educational Psychology, 83 (1), pp.88-96,1991.
- [10] Schvaneveldt, R.W. , Path finder Associative Networks: Studies in Knowledge Organization, Norwood, NJ: Ablex. 1990.

Investigate the Knowledge Structure of Problem-Solving for Fifth Grade Pupils under Drawing Line Segment Pictures Represented Formats

HUNG, YU-HUEI YIH, JENG-MING LIN, YUAN-HORNG
Ming-Jian Elementary School National Tai-Chung University National Tai-Chung University
comet.snow@msa.hinet.net yih@mail.ntcu.edu.tw lyh@mail.ntcu.edu.tw

Abstract

The purpose of this study was to understand the knowledge structure of problem-solving for fifth grade primary school students under drawing line segment pictures represented formats. The problems contain operating about reciprocity question and computing rational numbers. The researcher takes the fifth grade pupils who are total 67 people as subjects.

The research tools are “The Self-Editing paper-and-pencil test on the conception of reciprocity question and rational numbers under drawing line segment drawing represented formats.”, and proceeding analyzing statistical data by using the software BILOG, KNOT, SPSS and SAS, etc.

The main discoveries of this research are as follows:

- (1) Students of the ability group, the key concept that its knowledge structure diagram has nothing in common with each other that were different to solve problems.
- (2) Utilize seven groups trooping the analytical method and dividing into, every knowledge structure diagram have high similar degree extremely, it is obvious by using the method of

clusters analysis can group examinees effectively.

- (3) The result and discoveries from the research can offer pupils' line segment pictures concept with reference of diagnosis, instruction and editing.

Key word: Knowledge Structure, Line Segment Picture, Path Find

