

Broadcasting on the Alternating Group Graph

Hao-Shun Hung
Department of Computer Science &
Information Engineering
National Taiwan University
b4506040@csie.ntu.edu.tw

Hui-Ling Huang
Department of Information Management
Southern Taiwan University of
Technology
hlhuang@mail.stut.edu.tw

摘要

交替群圖(alternating group graph)是近年來被提出的一種新的連結網路拓樸結構，它屬於加利圖(Cayley graph)的一種。交替群圖具有很多很好的拓樸性質，如對稱性、遞迴性、規則性、較小的直徑及不錯的容錯能力等優點，因此它很適合做為大型多處理機系統的拓樸結構。之前的研究已解決了交替群圖上的一些基本拓樸性質，例如度數、直徑、最短路徑演算法及多埠模式下的廣播演算法等等，但是單埠模式下的廣播演算法則是尚未被解決。本篇論文主要是利用交替群圖可遞迴分解的特性，在單埠模式下找出一個一對多的廣播演算法。在一個 n 維的交替群圖上，我們所提出的單埠模式廣播演算法只需要 $O(n \log n)$ 的單位時間，它是一個最佳的(optimal)演算法。

關鍵詞：交替群圖、廣播、單埠模式、多埠模式

一、簡介

在設計大型多處理機系統時，處理機之間的連結網路拓樸性質是個設計上很重要的考量因素。它不僅影響其硬體的結構，也影響在上面執行各種演算法的效率，所以研究有關連

結網路的設計和演算法是平行和分散式系統中一個很重要的基本問題。

在各種連結網路中，加利圖(Cayley graph)是一個相當重要且值得注意的結構，最主要是加利圖擁有許多不錯的拓樸性質，如對稱性(symmetry)、遞迴分解性及不錯的容錯能力(fault-tolerant)等。常見的加利圖有星圖(star graph)[1]、平降圖(pancake graph)[3]、超立方體(hepercube)等等，相對於超立方體，星圖有較佳的度數(degree)和直徑，且有更佳的容錯能力[2]。

近來有個稱為交替群圖(alternating group graph)[15]的加利圖被提出，和星圖一樣，它有比超立方體好的度數和直徑，在[8]中也說明了它在通訊方面比星圖和超立方體表現要好，交替群圖也跟所有加利圖一樣具備相當好的拓樸性質，包括點對稱性、邊對稱性、遞迴性及規則性等，因此交替群圖很適合做為大型多處理機系統的拓樸結構。在[15]中已討論了一些交替群圖的基本拓樸性質，包括度數、直徑及最短路徑演算法等等，作者並提出一個在多埠(multi-port)模式下的一對多廣播(broadcasting)演算法。

廣播演算法是一個連結網路上的重要的問題，很多線性代數的演算法都會用到它[9][10][11]，如矩陣-向量乘法(matrix-vector multiplication)、矩陣-矩陣乘法(matrix-matrix multiplication)、高斯消去法(Gaussian elimina-

tion)、LU-分解(LU-factorization)以及 Householder 轉換(Householder transformation), 同時也用於資料庫查詢 遞移閉包(transitive closure)演算法[6]以及線性程式演算法。當我們考慮節點通訊能力時, 可以分成兩種模式, 即單埠模式和多埠模式。單埠模式中每個節點單位時間一次最多只能傳送一個訊息到另一個相連的點, 而在多埠模式中的每一個節點單位時間可以將資料同時傳給所有與它相連的節點。目前對於超立方體及星圖上的廣播演算法已有相當多的研究成果, [12]中討論了超立方體上各種模式下的廣播演算法; 而在星圖方面, [23]、[26]提供了一些多埠模式下的一對多廣播演算法, 而[1]、[4]、[21]、[20]、[22]和[25]也提出了許多單埠模式下的一對多廣播演算法, 另外在[20]和[7]中對單埠模式和多埠模式下的多對多廣播演算法也都有很好的結果。

本篇論文最主要是在交替群圖上找出單埠模式下的一對多廣播演算法。在單埠的模式下, 因為每個節點在一個單位時間內只能傳給一個相鄰節點, 所以在一個具有 N 個節點的網路上廣播至少要花 $\lceil \log_2 N \rceil$ 個單位時間; 另一方面, 若離原始節點最遠的節點距離為 h , 則由原始節點廣播至少需要 h 個單位時間, 而這個最遠距離 h 一定小於或等於這個圖的直徑 D 。所以在單埠模式下, 一對多廣播所需要的時間至少為 $\max(\lceil \log_2 N \rceil, D)$ 。任何一個廣播演算法若其執行時間能到達這個下界就可以說是最佳(optimal)的。我們將證明我們所提出的單埠模式廣播演算法是最佳的。

本篇論文其餘各節的內容如下: 第二節將詳細介紹交替群圖, 在第三節中我們將對交替群圖提出一個單埠模式下的一對多廣播演算法, 並在第四節做總結。

二、交替群圖及相關結果

在介紹交替群圖之前, 我們先介紹排列群(permutation group)及它的一些相關的定義。簡單的說, n 個物品的排列(permutation)就是將這 n 個物品在一個列上做順序的調換。例如 {1, 2, 3} 這三個元素的排列就有以下六種: 123、132、213、231、312 和 321。

我們也可以把排列看成是一種“重新命名”而使用兩列的表示法, 例如我們可以把 346251 表示成 $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 4 & 6 & 2 & 5 & 1 \end{pmatrix}$, 它的意義為“1 變成 3, 2 變成 4, 3 變成 6, 4 變成 2, 5 變成 5, 而 6 變成 1”。很明顯的, 將這個表示法中的每一列調換順序並不會改變這個排列, 例如剛剛的例子也可以改寫成 $\begin{pmatrix} 3 & 4 & 6 & 2 & 1 & 5 \\ 6 & 2 & 1 & 4 & 3 & 5 \end{pmatrix}$ 。

另一種排列的表示法為循環表示法(cycle notation)[16], 例如 $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 4 & 6 & 2 & 5 & 1 \end{pmatrix}$ 可以表示成 (136)(24)(5), 而這表示了“1 變成 3, 3 變成 6, 6 變成 1, 2 變成 4, 4 變成 2, 而 5 變成 5”, 其中每一個循環 $(x_1 \ x_2 \ \dots \ x_n)$ 代表了“ x_1 變成 x_2 , ..., x_{n-1} 變成 x_n , x_n 變成 x_1 ”。若是一個循環中只包含一個元素, 我們把這種循環成為不變量(invariant), 在上例中, 5 即是不變量。通常我們在循環表示法中會將不變量省略, 如上例我們可以省略成 (136)(24)。

另外, 我們把排列的乘法定義為對排列再另外做一次排列。例如排列 $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 4 & 6 & 2 & 5 & 1 \end{pmatrix}$ 經由另一個排列 $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 4 & 3 & 1 & 6 & 5 \end{pmatrix}$ 後, 我們可以觀察出來: 1 先變成 3 之後還是變成 3, 2 變成 4 之後又變

成了 1 等等，因此

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 4 & 6 & 2 & 5 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 4 & 3 & 1 & 6 & 5 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 4 & 6 & 2 & 5 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 3 & 4 & 6 & 2 & 5 & 1 \\ 3 & 1 & 5 & 4 & 6 & 2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 1 & 5 & 4 & 6 & 2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

令 $p = p_1 p_2 \dots p_i \dots p_j \dots p_n$ 為一排列，對每一組數對 (i, j) 且 $i < j$ ，若 $p_i > p_j$ ，則這個 (i, j) 就稱為一組倒反 (inversion)，我們用 $\sigma(p)$ 來表示 p 中倒反的數目，而我們定義 p 的等量 (parity) 為 $(-1)^{\sigma(p)}$ 。一個排列若其等量為 1，則稱其為偶排列 (even permutation)，反之若為 -1，則稱為奇排列 (odd permutation)。例如 $p = 346251$ ，則 $\sigma(p) = 9$ ，其等量為 -1，故 p 為奇排列。

以下我們將正式定義交替群圖，交替群圖被發表在 [15] 為一加利圖，其節點可視為 n 個符號構成的所有偶排列的集合。

定義 2.1 令 A_n 為所有 n 個元素形成的偶排列的集合，令 $g_i^+ = (1 \ 2 \ i)$ ，而 $g_i^- = (1 \ i \ 2)$ ， $\Omega = \{g_i^+ \mid 3 \leq i \leq n\} \cup \{g_i^- \mid 3 \leq i \leq n\}$ 。則我們定義 n 維交替群圖 $AG_n = (V_n, E_n)$ ，其中 $V_n = A_n$ ，而 $E_n = \{(p, q)_h \mid p, q \in A_n, q = p \times h, \text{ 其中 } h \in \Omega\}$ 。

我們稱上面定義中的 A_n 為交替群 (alternating group) [17][5]， $|A_n| = n!/2$ ，所以 AG_n 的節點個數為 $n!/2$ 。 Ω 是 A_n 的生成元集，且 $|\Omega| = 2(n-2)$ ，所以 AG_n 為規則圖且其度數為 $2(n-2)$ 。對交替群圖上的任意一個節點 $p = p_1 p_2 \dots p_i \dots p_n$ ，和它相連結的節點為 $p_2 p_i \dots p_1 \dots p_n$ 和 $p_i p_1 \dots p_2 \dots p_n$ 其中 $3 \leq i \leq n$ ，這些相連的節點都是分別經由運算元 g_i^+ 與 g_i^- 之後所產生的，以較直覺的看法可以看成是將節點 p 的第 1、2 和第 i 個符號分別向左和向右做旋轉的動作，圖 2.1 和圖 2.2 分別為 AG_3 和 AG_4 的例子。

從圖 2.2 可以觀察出若我們將 AG_4 中的點依照其第四個位置的數字來分類的話，每個點集合所形成的子圖均是和 AG_3 同構 (isomorphic) 的，例如第四位數字為 1 的點：4321、3241 和 2431 這三個點形成的子圖，就

和 AG_3 同構。事實上，若我們定義 $AG_n[j; i]$ 為 AG_n 的子圖且其中的每個點 $p = p_1 p_2 \dots p_n$ 均符合 $p_j = i$ 其中 $3 \leq j \leq n$ ，則 $AG_n[j; i]$ 和 AG_{n-1} 即為同構。例如 AG_4 中三點 4321、3241 和 2431 即為 $AG_4[4; 1]$ 。我們用 $AG_n[i]$ 作為 $AG_n[n, i]$ 的簡寫。

在 [15] 中作者提出一個最短路徑演算法，我們將它列於下。因為交替群圖具有點對稱性，所以任兩點之間的最短路徑問題可以視為是任意一點到單位節點 $I = 12 \dots n$ 的最短路徑問題。

演算法 2.1：最短路徑演算法

輸入：任一點 $p = p_1 p_2 \dots p_n$ 。

輸出： p 至 I 的最短路徑中 p 的下一個節點 p' 。

1. 若 $p_1, p_2 \in \{1, 2\}$ ，則 $p' = p \cdot g_i^*$ 其中 i 符合 $3 \leq i \leq n$ 且 p_i 不為 p 中之不變量，而 $*$ $\in \{+, -\}$ 。

2. 若 $p_1 \notin \{1, 2\}$ ，則 $p' = p \cdot g_i^+$ ，其中 $i = p_1$ ，或者若 $p_2 \notin \{1, 2\}$ ，則 $p' = p \cdot g_i^-$ ，其中 $i = p_2$ 。

例如，若 $p = 13254$ ，則由 p 走到 I 的路徑如下：

$$\begin{aligned} & 13254 \xrightarrow{g_3^-} 21354 \xrightarrow{g_4^+} 15324 \\ & \xrightarrow{g_5^-} 41325 \xrightarrow{g_4^+} 12345 \end{aligned}$$

先將符號 3 歸位，再將 5、4 分別歸位。由最短路徑演算法我們可以計算出任一節點到單位節點 I 的距離，若 $p = p_1 p_2 \dots p_n = c_1 c_2 \dots c_k e_1 e_2 \dots e_l$ ，其中 c_i 為長度大於 1 的迴圈， $1 \leq i \leq k$ ；而 e_j 是不變量， $1 \leq j \leq l$ 。則 p 到 I 的距離 D_p 為：

$$\begin{aligned} n+k-l & \quad \text{若 } p_1 = 1 \text{ 而且 } p_2 = 2 \\ n+k-l-3 & \quad \text{若 } p_1 = 2 \text{ 而且 } p_2 = 1 \\ n+k-l-2 & \quad \text{若 } p_1 \neq 1 \text{ 而且 } p_2 = 2 \\ n+k-l-2 & \quad \text{若 } p_1 = 1 \text{ 而且 } p_2 \neq 2 \\ n+k-l-3 & \quad \text{若 } 1, 2 \in c_i, 1 \leq i \leq k \\ & \quad \text{且 } 3 \leq |c_i| \\ n+k-l-4 & \quad \text{若 } 1 \in c_i, 2 \in c_j, 1 \leq \end{aligned}$$

$$i \neq j \leq k$$

由上可知，交替群圖的直徑為 $\left\lceil \frac{3(n-2)}{2} \right\rceil$ 。和超立方體和星圖比較，交替群圖的直徑比超立方體短，而和星圖的直徑相去不遠。

三、單埠模式下的廣播演算法

在[15]中已經提出交替群圖在多埠模式下的一對多廣播演算法，若考慮由單位節點 $I=12\dots n$ 廣播訊息到其他所有點，我們只要利用上一節所提出的最短路徑演算法，去建立一個以單位節點 I 為根的貪婪生成樹(greedy spanning tree)，則每一個節點到根節點 I 的路徑都是最短路徑，在多埠模式下只需要 $D = \left\lceil \frac{3(n-2)}{2} \right\rceil$ 個單位時間即可將訊息廣播給其他所有的節點。

在本節中我們將在單埠模式下解決在交替群圖上的一對多廣播問題，由於交替群圖是點對稱圖，所以我們可以不失一般性的將問題從任一節點傳訊息給所有節點簡化成從單位節點 I 到其他所有節點的廣播演算法。我們在第二節中提過交替群圖是可以被遞迴分解的，在維度為 n 的交替群圖中，我們只要能先把訊息傳給每個維度為 $(n-1)$ 的子圖，接下來再利用遞迴的方式對每個子圖做廣播即可，所以我們首先討論如何將訊息傳給每個子圖。

以圖 3.1 的 AG_5 為例，我們可以觀察出節點 12345 若想要到 $AG_5[3]$ 這個子圖，可以經由 23145 \rightarrow 52143 這條路徑到達，也可以經由 31245 \rightarrow 15243 這條路徑到達。而若是要到 $AG_5[4]$ ，可經由 24315 \rightarrow 52314 或 41325 \rightarrow 15324 這兩條路徑到達，而 $AG_5[2]$ 和 $AG_5[1]$ 可以直接經由一步就可到達。從上面的例子我

們可以發現，12345 要到達每個子圖最多只要花兩步的時間，例如要走到 $AG_5[i]$ ，第一步先走到第一位或第二位數字為 i 的點，第二步即可直接走到目的地。所以，我們再把這部分的演算法分成兩個階段，第一階段先把資訊傳到 $n-1$ 個第一位數字或第二位數字為 i 的點，其中 $1 \leq i \leq n-1$ ；第二階段再把資料從這 $n-1$ 個點傳到其他 $n-1$ 個子圖中。

因為第一階段要把訊息傳給總共 $n-1$ 個節點，所以至少要 $\lceil \log(n-1) \rceil$ 的時間(以下文章中的 \log 均是以 2 為底)。為了簡化問題，我們特地挑這 $n-1$ 個節點均為第一位數字為 i 的點，其中 $1 \leq i \leq n-1$ 。我們令這個演算法會傳到的第一位為 i 的點為 P_i ，而這個 i 值就稱為 P_i 的 $CARD$ 值。我們將演算法分成 $\lceil \log(n-1) \rceil$ 個步驟，第一步驟傳給 P_2 ，第二步驟傳給 P_3, P_4 ，第三步驟傳給 $P_5, P_6, P_7, P_8, \dots$ 等等。一般來說，在第 i 個步驟中，其中 $1 \leq i \leq \lceil \log(n-1) \rceil$ ，資料將從 $P_1, P_2, \dots, P_{2^{i-1}}$ 傳到 $P_{1+2^{i-1}}, P_{2+2^{i-1}}, \dots, P_{2^{i-1}+2^{i-1}}$ 。而且當 i 不等於 1 時，因為 P_j 的 $(j+2^{i-1})$ 一定在第 $(j+2^{i-1})$ 位，所以 P_j 傳輸資料到 $P_{j+2^{i-1}}$ 所需要經過的連結就是 $g_{j+2^{i-1}}^-$ ，其中 $1 \leq j \leq 2^{i-1}$ ；而當 i 等於 1 時有特殊情況，因為 2 在 P_1 的第二位，所以需要經過的連結我們就取 g_3^+ 。圖 3.2 為此第一階段演算法在 AG_6 上的例子。

以下為上述之演算法，其中每個節點需同時的執行這個演算法。特別要注意的是若我們沿著 g_i^+ 送訊息，目標點會由 g_i^- 收到訊息。另外，此演算法並沒有限制原始節點一定要是單位節點 I ，我們令原始節點的 $CARD$ 值為 1。

演算法 3.1: 第一階段

輸入: 這個交替群圖的維度 n
 for $i := 1$ to $\lceil \log(n-1) \rceil$ do
 if 這個節點有訊息要送

```

begin
  dim := CARD + 2i-1;
  if dim = 2
    then 沿著 g3+ 送訊息;
  else if dim < n
    then 沿著 gdim- 送訊息;
  end
  else
    if 收到了沿著維度 g3- 的連結送來的訊息
      then CARD = 2;
    else if 收到了沿著維度 gd+ 的連結送來的訊息
      then CARD := d;
    end {for};

```

定義 3.1 在這個演算法中，我們定義來源節點為 Q_1 ，而其他節點則定義成 Q_{card} ，其中 $CARD$ 是他在演算法中收到訊息時候被設定的值。並且，我們定義 q_j^k 為 Q_j 的第 k 位數字。其中， $1 \leq j \leq n-1$ 且 $1 \leq k \leq n$ 。

定理 3.1 若 $n \geq 4$ ，演算法 3.1 將資料傳到 $n-1$ 個點： Q_1, Q_2, \dots, Q_n 。而且對每個 $1 \leq j \leq n-1$ ， $q_j^1 = q_1^j$ 。

證明：我們將用數學歸納法來證明它。當 $n=4$ 時和 $n=5$ 時，經由簡單的測試就可以發現他是正確的。現在若我們假設這個引理在 $n \leq 2^{k-1} + 1$ 時是成立的，即此演算法會將訊息傳到 Q_1, Q_2, \dots, Q_{n-1} ，且對每個 $1 \leq j \leq n-1$ ， $q_j^1 = q_1^j$ 。則當 $n = 2^{k-1} + 1 + m$ ， $1 \leq m \leq 2^{k-1}$ 時，首先這個演算法在 $i = \lceil \log[(2^{k-1} + 1 + m) - 1] \rceil = k$ 時，資料會由 Q_1, Q_2, \dots, Q_m 傳到 $Q_{2^{k-1}+1}, Q_{2^{k-1}+2}, \dots, Q_{2^{k-1}+m}$ ，因此資料恰巧會傳給 $n-1$ 個點： $Q_1, Q_2, \dots, Q_{2^{k-1}+m}$ 。

其次，因為這個演算法在 $i < k$ 時，傳資料所經過的連結的維度均不會比 2^{k-1} 大，所以 $q_u^l = q_v^l$ 對每一個 $1 \leq u, v \leq 2^{k-1}$ ， $2^{k-1} \leq l \leq n$ ；換句話說這些點均符合 $q_u^j = q_1^j$ ，其中

$2^{k-1} < j \leq n, 1 \leq u \leq 2^{k-1}$ 。因為 $Q_{2^{k-1}+l} = Q_l \times g_{l+2^{i-1}}^-$ ，所以 $q_{l+2^{i-1}}^1 = q_l^{l+2^{i-1}}$ ，其中 $1 \leq l \leq m$ 。

因此，根據數學歸納法，我們證明了這個演算法會將資料傳到 $n-1$ 個點： Q_1, Q_2, \dots, Q_{n-1} ，而且對每個 $1 \leq j \leq n-1$ ， $q_j^1 = q_1^j$ 。
□

因為我們在第一階段中已經把訊息傳給 $n-1$ 個第一位數字不同的點了。在第二階段中，只要由這些點再延著 g_n^- 傳訊息，就可以傳訊息到每個子圖中。

依照上述的兩階段演算法，再加上遞迴的部分，整個廣播演算法如下：

演算法 3.2: 廣播演算法

輸入: 這個交替群圖的維度 n

```

SIZE := n;
CARD := 1;
if (SIZE > 3) then
  begin
    repeat
      /* 第一階段 */
      for i := 1 to ⌈log(SIZE - 1)⌉ do
        if 這個節點有訊息要送
          begin
            dim := CARD + 2i-1;
            if dim = 2
              then 沿著 g3+ 送
              訊息;
            else if dim < SIZE
              then 沿著 gdim- 送
              訊息;
            end
            else
              if 收到了沿著維度 g3-
              的連結送來的訊息
                then CARD = 2;
              else if 收到了沿著維度

```

```

     $g_d^+$  的連結送來的訊息
        then  $CARD := d$ ;
    end {for};
    /* 第二階段 */
    沿著  $g_{SIZE}^-$  送訊息;
     $SIZE := SIZE - 1$ ;
until ( $SIZE = 3$ )
end;
/*  $AG_3$  上的廣播 */
沿著  $g_3^+$  傳訊息;
沿著  $g_3^-$  傳訊息;

```

定理 3.2 演算法 3.2 總共需要 $\sum_{i=2}^{n-1} (\lceil \log i \rceil + 1) = O(n \log n)$ 次傳輸。

證明：此演算法最外層的迴圈中， $SIZE$ 會由 n 降到 4，而內層迴圈需要 $\lceil \log(SIZE - 1) \rceil + 1$ 次傳輸，所以共需要 $\sum_{i=4}^n (\lceil \log(i - 1) \rceil + 1) + 2 = \sum_{i=2}^{n-1} (\lceil \log i \rceil + 1)$ 次傳輸。而顯然的 $\sum_{i=2}^{n-1} (\lceil \log i \rceil + 1) < (n-2)(\log n + 1) < 2n \log n$ ，所以 $\sum_{i=2}^{n-1} (\lceil \log i \rceil + 1) = O(n \log n)$ 。 □

定理 3.3 在單埠模式下，演算法 3.2 可以用 $O(n \log n)$ 次通訊將訊息由單位點 I 廣播到交替群圖 AG_n 上的每一個點。

證明：根據定理 3.2 我們已經知道了這個演算法的通訊步數，接下來我們要用數學歸納法證明它可以廣播到 AG_n 上的每一個點。當 $n = 3$ 時這個演算法經由最後兩個步驟即可傳到所有點，顯然是正確的。而若我們假設這演算法在 $n = k - 1$ 時可以將資料傳到 AG_{k-1} 上的所有點。則當 $n = k$ 時，根據定理 3.1，此演算法外層迴圈在 $SIZE = k$ 時，可以讓每個子圖上均有一點有資料，接下來這演算法即和 $n = k - 1$ 時

相同，根據歸納法假設，我們知道此演算法即可以讓整個 AG_n 上的所有點都收到資料，而這就完成了我們的證明。 □

因為交替群圖上的點數為 $\frac{n!}{2}$ ，而它的直徑是 $\left\lfloor \frac{3(n-2)}{2} \right\rfloor$ ，所以單埠下的一對多廣播演算法至少要 $\max(\log \frac{n!}{2}, \left\lfloor \frac{3(n-2)}{2} \right\rfloor) = O(n \log n)$ 的時間。因此，我們找出來的廣播演算法是最佳化(optimal)的。

四、總結

廣播問題在連結網路上是很重要的問題，在連結網路上的許多演算法都會用到它。在交替群圖上，多埠模式下的一對多廣播、多對多廣播和單節點散播等問題已經都被解決 [15][19]，但是對於單埠模式下的一對多廣播問題則尚未被解。本篇論文中針對交替群圖我們提出一個單埠模式下的一對多廣播演算法，它是一個最佳化的演算法。然而它會有多餘(redundancy)訊息，所以如何將其改正到沒有多餘訊息將是接下來的首要目標。另外在交替群圖上，除了一對多廣播之外，單埠模式下的其他通訊問題，如多對多廣播、一對多個人化通訊等都還沒有被解過，這些也是未來很好的研究方向。

五、參考文獻

- [1] S. B. Akers, D. Harel, and B. Krishnamurthy, "The star graph: an attractive alternative to the n-cube," *Proceedings of the international Conference on Parallel Processing*, 1987, pp.

- 393-400.
- [2] S. B. Akers and B. Krishnamurthy, "Group graphs as interconnection network." *Proceedings of 14th International Conference on Fault-Tolerant Computing*, 1984, 422-427.
- [3] S. B. Akers and B. Krishnamurthy, "A group-theoretic model for symmetric interconnection networks" *IEEE Transactions on Computer*, vol. 38, no. 4, pp. 555-566, 1989.
- [4] S. G. Akl, K. Qiu, and I. Stojmenovic, "Fundamental Algorithms for the Star and Pancake interconnection Networks with Applications to Computational Geometry." *Networks*, vol. 23, no. 4, pp. 215-225, July 1993.
- [5] C. Berge, *Principles of Combinatorics*. Academic Press, New York 1971 Chap.4.
- [6] S. A. Browning, "The tree machine: a highly concurrent computing environment," Tech. Rep. 1980:TR:3760, Comput. Sci., California Instit. Technol., Jan 1980.
- [7] P. Fragopoulou and S. G. Akl, "Optimal Communication Algorithms on Star Graphs Using Spanning Tree Construction.", *J. Parallel and Distributed Computing*, vol. 24, pp. 55-71, Jan. 1995.
- [8] M. D. Grammatikakis, J.-S. Jwo, M. Kraetzl and S.-H. Wang "Dynamic and static packet routing on symmetric communication networks." *Global Telecommunication Conference, GLOBECOM'94, IEEE Communications: The Global Bridge*, 1994, vol. 3, pp. 1571-1575.
- [9] D. Gannon and J. V. Rosendale, "On the impact of communication complexity in the design of parallel numerical algorithms," *IEEE Transactions on Computers*, vol. C-33, pp. 1180-1194, Dec. 1984.
- [10] S. L. Johnsson, "Communication efficient basic linear algebra computations on hypercube architectures," *Journal of Parallel and Distributed Computation.*, vol. 4, pp. 133-172, Apr. 1987.
- [11] S. L. Johnsson, "Odd-even cyclic reduction on ensemble architectures and the solution tridiagonal systems of equations" Tech. Rep., YALE/DCS/RR-339, Dep. of Comp. Sci., Yale Univ., Oct 1984.
- [12] S. L. Johnsson and C. T. Ho, "Optimal Broadcasting and Personalized Communication in Hypercubes." *IEEE Transaction on Computer*, vol. 38, no. 9, pp. 1249-1268, 1989.
- [13] S. L. Johnsson and C. T. Ho, "Matrix transposition on boolean n-cube configured ensemble architectures," *SIAM J. Matrix Anal. Appl.*, vol. 9, pp. 415-454, July 1988.
- [14] S. L. Johnsson and C. T. Ho, "Algorithms for multiplying matrices of arbitrary shapes using shared memory primitives on a Boolean cube.," Tech. Rep. YALEU/DCS/RR-569, Dep. Comput. Sci., Yale Univ., Oct. 1987. Revision of YALE /DCS/RR-530. Presented at the ARMY Workshop on Medium Scale Parallel Processors, Standford Univ., Jan 1986.
- [15] J. Jwo, S. Lakshmirarahan and S. K. Dhall, "A New Class of Interconnection Network Based on the Alternating Group." *Network*, vol.23 pp. 315-326, 1993.

- [16] D. E. Knuth, *The Art of Computer Programming*. Addison Wesley Reading, MA(1973) Vol, 1.
- [17] S. Lakshmivarahan, J. S. Jwo, and S. K. Dhall, "Symmetry in interconnection networks based on cayley graphs of permutation group: a survey," *Parallel Computing*, 19, pp. 361-407, 1993.
- [18] W. Ledermann, *Introduction to the Theory of Finite Groups*. Oliver and Boyd, London.
- [19] C.-M. Lai and J.-J. Tsay, "Communication algorithms on alternating group graph," *Parallel Algorithms/Architecture Synthesis, 1997. Proceedings., Second Aizu International Symposium , 1997* , Page(s): 104 –110.
- [20] J. Misic and Z. Jovanovic, "Communication Aspects of the Star Graph Interconnection Network." *IEEE Transaction on Parallel and Distributed Systems*, vol. 5, no. 7, pp. 678-687, July 1994.
- [21] V. E. Mendia and D. Sarkar, "Optimal Broadcasting on the Star Graph," *IEEE Transaction on Parallel and Distributed Systems*, vol. 3, no. 4, pp. 389-396, July 1992.
- [22] K. Qiu, "Broadcasting on the Star and Pancake Interconnection Networks." *Proceeding International Parallel Processing Symposium*, pp. 660-665, 1995.
- [23] J.-P. Sheu, W.-H. Liaw, and T.-S. Chen, "An Broadcasting Algorithm in Star Graph Interconnection Networks," *Information Processing Letters*, vol. 48, pp. 237-241, 1993.
- [24] Y. Saad and M. H. Schultz, "Topological properties of hypercubes," *IEEE Transactions on Computers*, vol. 37 7, pp. 867-872, July 1988.
- [25] J.-P. Sheu, C.-T. Wu, and T.-S. Chen, "An Optimal Broadcasting Algorithm without Message Redundancy in Star Graphs," *IEEE Transaction on Parallel and Distributed Systems*, vol. 6, no. 6, pp. 653-658, June 1995.
- [26] Y.-C. Tseng and J.-P. Sheu, "Toward Optimal Broadcasting in a Star Graph Using Multiple Spanning Trees." *IEEE Transactions on Computers*, vol. 46, no. 5, pp. 593-599, May 1997.

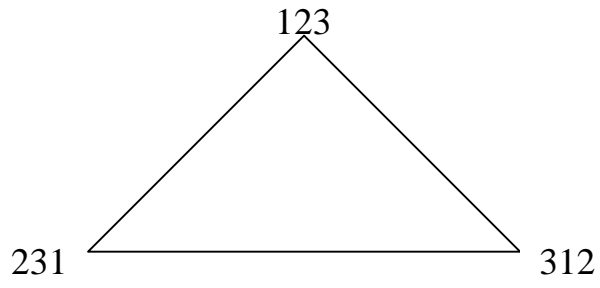


圖 2.1 : AG_3

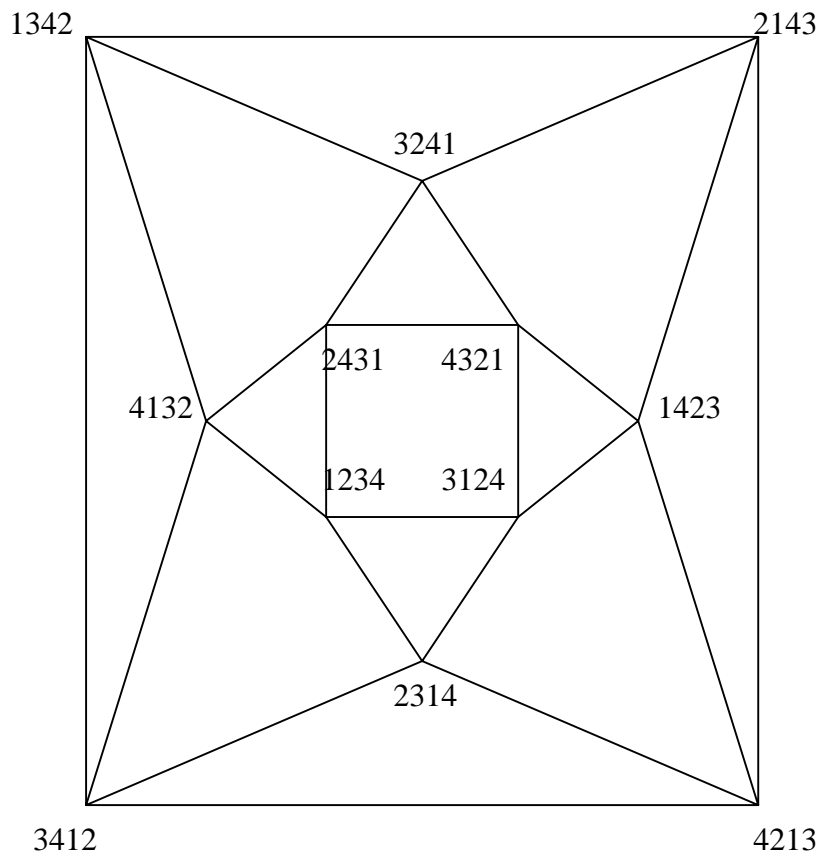
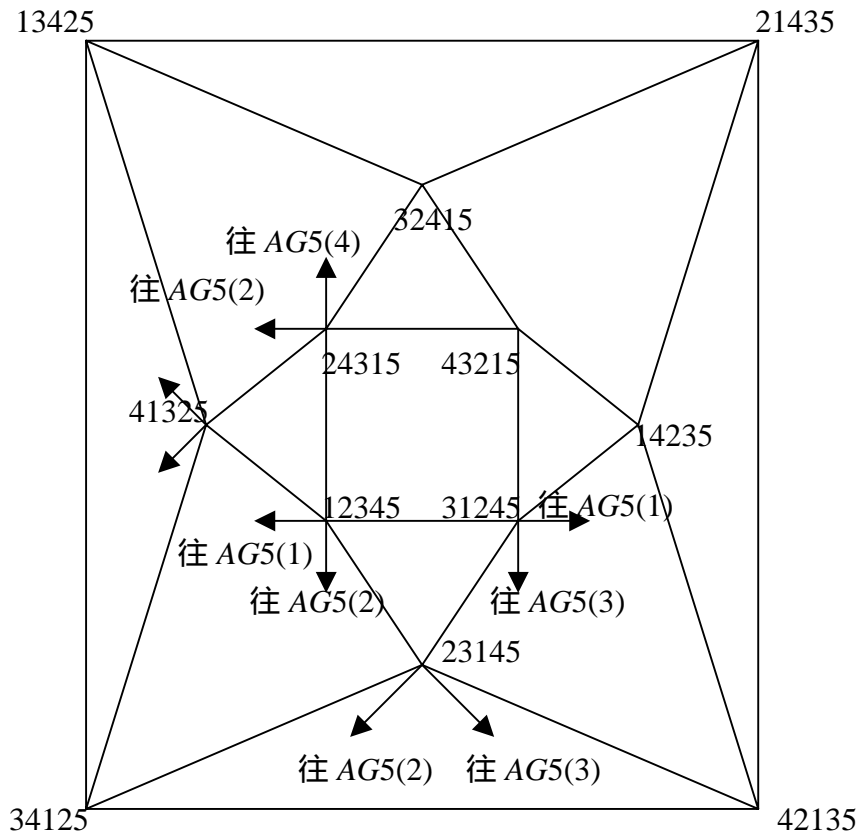


圖 2.2 : AG_4



往 $AG_5(1)$: 12345 → 25341
 往 $AG_5(2)$: 12345 → 51342
 往 $AG_5(3)$: 12345 → 31245 → 15243
 12345 → 23145 → 52143
 往 $AG_5(4)$: 12345 → 24315 → 52314
 12345 → 41325 → 15324

圖 3.1: $AG_5(5)$

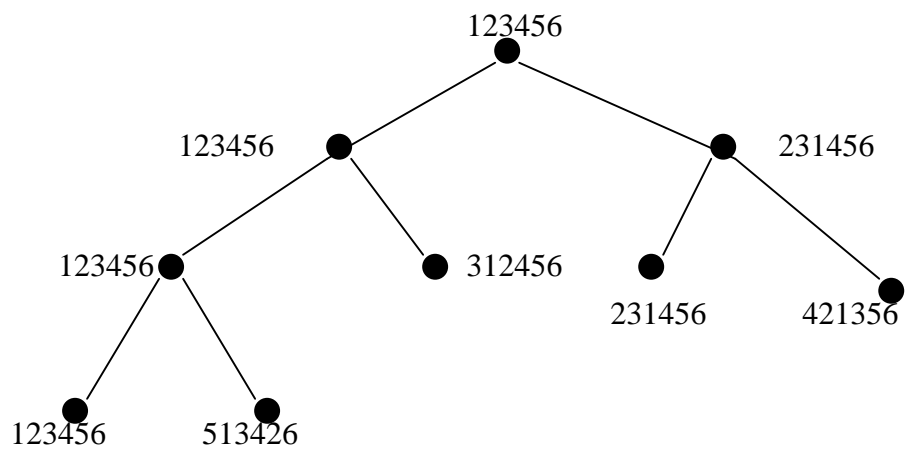


圖 3.2 : AG_6 上的第一階段演算法