教育部教學實踐研究計畫成果報告(封面)
Project Report for MOE Teaching Practice Research Program (Cover Page)

計畫編號/Project Number：PMS107012
學門分類/Division：數理
執行期間/Funding Period：2018-08-01 ~ 2019-07-31

結合 GeoGebra 教具及雲端學習平台之雙變數微積分實踐教學
(配合課程名稱/Course Name: 微積分)

計畫主持人(Principal Investigator)：林姿均

共同主持人(Co-Principal Investigator)：林震燦、張桂芳

執行機構及系所(Institution/Department/Program)：

逢甲大學應用數學系

繳交報告日期(Report Submission Date)：

民國一〇八年九月五日星期四

壹、研究動機與目的

雖然多變數微積分的概念本質與單變數微積分是相同的。但實際上，處理多變數微積分問題的複雜度卻比單變數微積分高很多。例如，當學生以處理單變數函數微分的經驗去嘗試處理多變數函數方向導(函)數時，往往會碰壁，對大部分學生而言，好像到一完全陌生領域。微分量則是學生的另一個痛點。學生往往無法將微分量與線性逼近的概念連想在一起，常常迷失在 dz 與Δz 的符號中。而等高線與梯度向量則是在單變數微積分裡沒有的新概念。在教學現場我們觀察到學生雖然能套用公式計算出答案，雖然教學搭配預製的靜態圖表，但學生並沒有概念性的理解。

微積分的重要性不只在數學領域，更是所有 STEM (科學，技術，工程及數學)教育領域的核心知識。以數學(應數)系學生來說，若無法掌握好微積分的基本概念，意味著對之後的微方，數值，統計等學科也會有學習上的障礙。在真實世界所需要處理的函數大多是多變數函數。大學微積分課程由單變數跨越到多變數，對大部分學生而言，是相當大的挑戰。因為抽象概念更深且認知機制更複雜，多變數微積分的重要概念如極限、連續、偏導數、方向導數、梯度向量等概念是環環相扣的，但學生常常分不清楚其中的邏輯關聯(Martínez & Vinuesa 2002; 余啟哲&吳思慧,2014)。很多研究顯示，讓電腦視覺化環境融入教學過程可以提升學習成效。而科技部也早已把電腦輔助高等數學教學列為重點研究項目。資訊科技早已融入我們的日常生活。在教學現場，我們觀察到學生的學習態度與方式有著顯著的改變。面對離不開 3C 產品的世代，傳統的教學方式已不能滿足授業者與學習者雙方的需求。以微積分教學為例，在很多教學研究文獻中，都提及透過電腦環境視覺化與動態的操作，將微積分的抽象概念具像化，並透過動手操作，對學生的學習成效有正面的意義(Tall,1992; Ocal,2017; Verzosz, Guzon & Antonette, 2014;吳思慧、余啟哲&邱守榕,2009; 余啟哲&吳思慧,2014)。

有鑑於此，本動態教具研發團隊，以雙變數函數為主，於 105 學年度開始微積分之 GeoGebra 3D-動態教具的設計開發(林震燦等人，2018)。此 GeoGebra 3D-動態解析教具已試用於本系微積分課程，普遍得到學生正面評價。它能清楚地顯示數據與圖形的互動。但是 在教學現場仍採傳統式教學方式: 由教師講授並操作動態教具，而學生只是被動地接收訊息。並不清楚學生的微積分概念認知狀況。因此，為了使本系研發團隊成果能被更有效率地應用在雙變數微積分教學，本研究研擬實作融入視覺化學習環境的微積分教學策略。

貳、文獻探討

微積分課程中單變數函數極限、導函數及積分等關鍵課題都有不少的學習及教學研究結果被發表。但關於多變數微積分的學習及教學研究與之相比就少很多(Martinez-Planell&Gaisman ,2009; Trigueros Gaisman et al., 2016)。2014 年 Korko &Weber 探討當函數由單變數擴張到多變數時,學生如何思考其定義域及值域。Weber(2013) 以兩位學生為樣本,觀察他們在面對變化率的基本概念時,如何由單變數函數的導數推導到雙變數的偏導數定義;再更進一步到更複雜的方向導數。倆位學生針對第一個推導,大致都可以幾何意義來理解。但他們無法完成方向導數的解釋。Trigueros Gaisman et al. (2016) 以 APOS(action, process, object, scheme)為架構,以訪談方式試圖解析學生對 3 維空間切平面與微分量之間關連性的理解程度。這些被訪談的學生雖然已完成雙變數微積分的課程,但卻無法回憶起這兩者的關連性。Tall(1992)建議以視覺化的方式呈現微分量的本質,且認為不需強調所有微積分主題都要以視覺化方式呈現,因為這樣做可能會對更高維度微積分的學習產生困擾。但 Tall 也認為以視覺化的幾何圖像來解釋微分量的概念是很恰當的。吳思慧等人(2009)以 Java 互動式模組幫助學生理解雙變數函數的可微性。經由視覺化,抽象的概念得以親近,學生產生學習自信。但他們也提到電腦軟體輔助教學,仍需教師適當的引導才能達到好的學習效果。事實上,電腦科技輔助的教學法,教師的責任或能力需求比傳統教學更甚。本研究計畫設計以 GeoGebra 融入雙變數微積分教學。GeoGebra 的特點除了是免費繪圖軟體外,還可以呈現轉動的 3D 圖形,學生可以直接觀察到雙變數微積分的幾何意義。但有好的教具還是需要適當的引導才能發揮它的功能,否則將流於一般的遊戲程式。

十九、二十世紀,許多教育、心理學家針對兒童的心智發展提出各式各樣的學習理論。其中,發展心理學家 Vygotsky 提出近側發展區間(zone of proximal development, 簡稱 ZPD)的認知發展理論(1978)。ZPD 指的是由學習者的實際發展層次到潛在發展層次之間的動態距離,也就是由學習者的基本能力層次到需要經由教師或同儕協助才能完成的層次的距離,而這兩種層次隨著學習歷程的行進而有所變動。ZPD 理論在意的是透過教學,協助學生超越目前的基本能力朝向更成熟層次發展。植基於此 ZPD 理論的鷹架(scaffolding/scaffolds)學習概念應運而生。鷹架學習理論最先由 Wood, Bruner & Ross (1976)提出,引起了很大的迴響。很多教育學家對鷹架理論提出不同的觀點、模式及不同教學情境下的鷹架教學設計(謝州恩, 2013)。簡言之,鷹架學習理論強調知識的獲得是由學習者自己建構的,而此建構過程乃是學習者經由與他人(教師或同儕)互動形成的。鷹架學習理論可以視為是教學策略,好的教學策略是要能製造學習者與他人的正面互動契機,進而激發出學習者的潛在能力。在我們視覺化的教學情境下,將參考學生能力程度設計主題式工作單來架設學習鷹架。

叁、研究方法

一、研究對象

本研究對象為大一理學院與資電學院三班共約 130 位學生，分為實驗 A 組、實驗 B 組及對照組。實驗 A、B 兩組由同一位老師授課。

二、研究工具

本教學策略所需設計的工具包含前測問卷、3D-動態解析教具、主題式工作單、後測試題建置和後測問卷設計。以下就這些工具的特色做介紹。

(一) 前測問卷設計:使用 Google 表單了解學生關於空間與向量的先備知識。

(二) 3D-動態解析教具之設計特色：

1. 操作簡便的使用介面。
2. 建構網路伺服器平台:學生可不受地域、時間限制連結此平台。
3. 隨使用者需求，以拖曳方式任意選擇觀察視角。
4. 透過逐步點選文字符號，逐一地將欲傳達的函數幾何意義及相關公式闡釋出來。
5. 可同時開啟多個程式視窗。
6. 可放入課程講義。
7. 亦具備自動撥放功能。
8. 提供放置可供下載檔案的存放格。

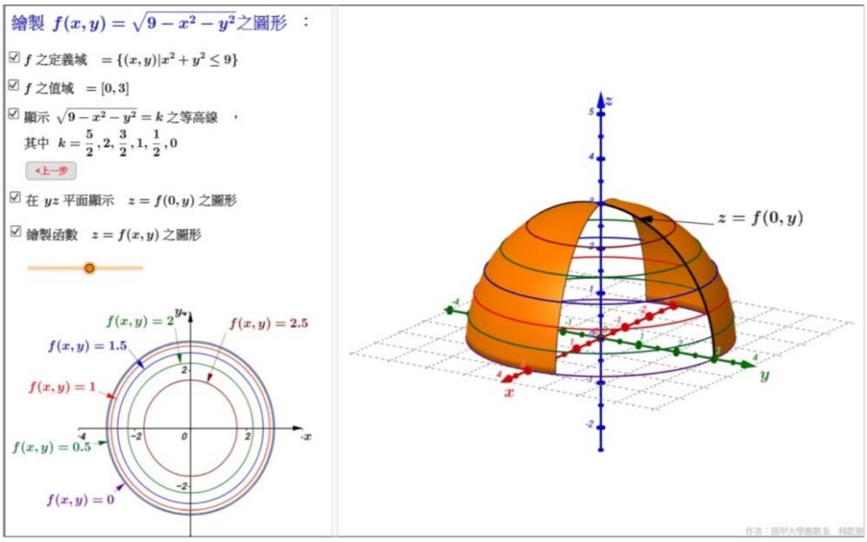

圖 1 函數等高線

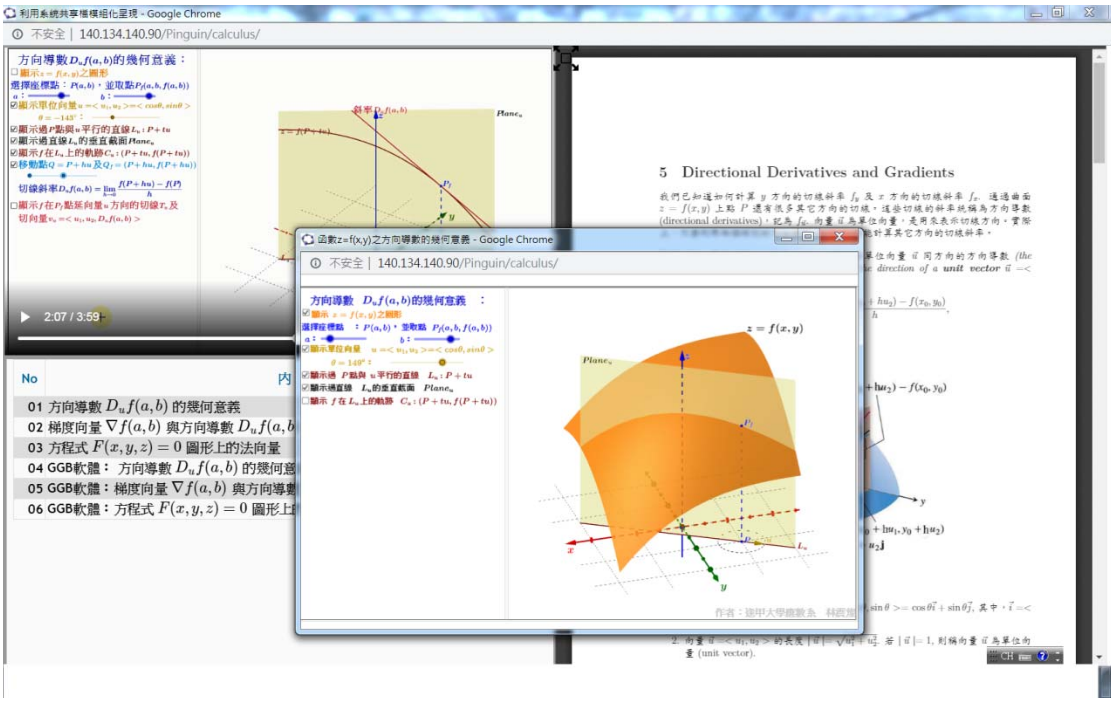

圖 2 方向導數

(三)主題式工作單之設計特色：分為合作式工作單及個人工作單。

1.合作式工作單設計特色及目的：

(1) 利用個人行動載具的輔助，完成部分任務。

(2) 將在單變數函數學到的微積分的幾何特徵推導到雙變數函數上。

(3) 以同儕之力，提升整體的學習效率。

2.個人工作單設計目的：普遍地，對同儕間互相支援、討論的合作學習方式，大都報以正面的評價。 但有兩點不可忽視的是: 合作學習常流於只有 1-2 組員努力地工作，其他人則在一旁等待答案的情況。此外，在教學時數限制下，如何引導學生具備獨立完成任務的自信。對此問題，我們特別設計同樣是在課堂上使用的個人工作單，選擇適當的議題(譬如，微分量)，仍由教師利用動態教具講解其理論概念，學生在教師的引導之下，自己逐一完成工作單上要求的實務型任務。

(四)後測試題建置: 試題設計包含以下層面: 1.雙變數函數基本性質，2.方向(偏)導數幾何概念的理解，3.微分量與切平面之應用關聯性，4.逐次積分之運算，5.基本運算概念。

(五)後測問卷設計: 問卷內容主要包含學生對動態解析教具之學習反映、對工作單之學習反映以及自我學習態度。

三、教學實驗

本次研究主題乃微積分第二學期課程的雙變數微積分部分。 課程持續6週，實驗 A 組與對照組上課節數是 24 節，實驗 B 組則是 18 節。對學生而言，積分的基本幾何概念是相對地容易理解。考慮到授課時數限制，以及學生的學習負荷，本教學策略的成果分析將聚焦在雙變數函數相關圖形、偏導數、方向導數、切平

面、梯度向量、微分量以及線性逼近的概念理解。

誠如前所提，多變數微積分的概念本質與單變數微積分是相同的。但實際上，處理多變數微積分問題的複雜度卻比單變數微積分高很多。工作單的設計目的在以每位學生都能掌握的幾何直觀，激發學習自信心為開端，再逐漸的往更深的抽象概念前進。首先喚起學生已知的單變數函數的舊知識，銜接到多變數函數：每一小組分配一函數$z=f(x,y)$，學生參考線上繪圖軟體，手繪此函數 3D-圖形及等高線圖並回應相關問題。接著，以幾何圖像搭配在單變數微分學到的導數定義，推導出兩偏導數$f_x(a,b)=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h,b)-f(a,b)}{h}$，$f_y(a,b)=\lim_{h\to 0}\frac{f(a,b+h)-f(a,b)}{h}$，再進而詮釋偏導函數 $f_x(x,y)$及$f_y(x,y)$。由 3D-動畫教具，學生知道在同一座標點可以產生多條不同斜率的切線，接下來，就可以討論方向導數與梯度。動態教具在設計上，注意到用明顯的色彩差異性，讓使用者在畫面中可以輕易地分辨截面、切平面、截面曲線及切線等等。而且 3 維座標座標系統是可以隨意轉動，因此，任意點上不同方向的切線都可毫無障礙地觀看得很清楚。這套動態教具系統，只要懂得電腦開機的人都會操作。

微分量(differentials)是學生的另一個痛點。學生往往無法將微分量的概念與切平面的概念連想在一起(Gaisman , Martinez-Planell&McGee , 2018)，常常迷失在 dz 與Δz 的符號中。精心設計的動態教具提供視覺探索$dz,\Delta z$ 與切平面的機會。學生操作此教具，可經由隨意移動視角清楚地觀察這三者的幾何關聯性。搭配個人工作單的活動，在教師的適切引導下讓學生經由解題的歷程強化對$dz,\Delta z$,切平面與線性逼近等概念的聯繫關係，並延伸到可微性的抽象概念。

肆、結果分析

依據課程開始前所做的先備知識問卷，這三組學生在雙變數微積分所須具備的先備知識的認知程度並無顯著差別。

一、學生作答分析

導函數的基本概念從單變數到雙變數雖是相同，但是對學生而言，處理的難度卻相對高很多。後測試題作答結果，我們發現幾個耐人尋味的現象。

(一)我們以填充題型式測試偏導數的幾何概念。這 3 組學生中對偏導數的幾何概念理解的人數並無顯著差別。

(二)以計算題型式測試方向導數概念。兩實驗組學生答對及理解但計算失誤的人數比例明顯地比對照組高出很多，而且兩實驗組間也存在明顯差異。

(三)以計算題型式測試對微分量與線性逼近的理解。若以針對此組合題有作答的人數計算，每人平均得分的百分比，對照組是 38%、實驗 A 組是 41%、實驗 B 組是 50.5%。若以參與考試人數計算，則對照組的平均得分百分比則掉了至少 26%以上，而兩實驗組失掉的百分比控制在 10%以內。

(四)以上三主題也正是我們的工作單聚焦的主要概念。我們發現相對於對照組，實驗 A、B 組學生雖然不一定能完美地完成任務，但是大部份學生都有勇於嘗試

的勇氣。

二、學習成就分析

學生整體學習成效評量結果將以 ANCOVA 分析實驗組與對照組是否存在差異，控制變因為期中考成績。期中考成績經 one-way ANOVA 檢測 p-value 達到 p≅0.833 ，顯示這三組學生的學習程度並無顯著差異。新教學策略實行後，以 ANCOVA 分析結果顯示，期中考成績顯著影響後測成績 (p≅0.000**)，而且這三組的後測成績在校正期中成績後，顯示出明顯的差異性(p≅0.000**): 實驗 B 組學習成效高於實驗 A 組，實驗 A 組學習成效又高於對照組。

表 1 前後測成績檢定

Index	人數	期中成績		後測成績	
		平均值	標準差	平均值	標準差
1(實驗 A 組)	41	59.71	22.62	54.34	28.31
2(實驗 B 組)	41	56.22	23.22	67.39	21.38
3(對照組)	44	57.77	31.34	39.61	23.83
檢定結果		檢定	p-value	檢定	p-value
				期中成績	0.000
ANOVA/ANCOVA		Index	0.833	Index	0.000

三、學習反映問卷

學習反映問卷採用 Likert 五量表，對兩實驗組學生進行問卷調查(回收 62 份)，問卷內容包含對動態教具與工作單介入教學的反應，以及學習平台的設置是否會提升自我學習意願的評價(5 分為最高分)。 表 2 顯示學生對由動態教具學習平台搭配工作單營造出來的學習環境報以正面樂觀的評價。而這正面的評價也確實反饋在他們的學習成效上。表 2 的自我學習意願這項提問的是，這套動態教具平台(學生可隨時隨地操作使用)是否會更增強自我學習意願。學生的回應比較趨於保守。

表 2 後測問卷結果

	動態教具	工作單	自我學習意願	觀看次數	
				平均	最多
實驗 A 組	3.81	3.82	3.52	4.04	11
實驗 B 組	3.95	3.86	3.06	3.38	11

伍、結論

本教學實驗以自行研發的 GeoGebra 3D-動態解析教具平台搭配精心編製之工作單用於教學現場,探究在此學習環境下的學生與接受傳統教學法的學生之間

學習成效是否存在差異性。我們的分析結果確實存在著極顯著的差異性。兩實驗組的後測成績，明顯高於對照組成績(見表 1)。另一方面，令我們有些訝異的現象是:對照組在各題目放棄作答的人數比例明顯地高於兩實驗組。這種現象是否能解釋為實驗組學生面對問題時是比較有自信的?

因為工作單的施作,整個教學節奏是非常緊湊的,尤其是對實驗 B 組學生。雖然本教學策略實驗得到極正面的學習成效,但是在整個教學過程一直存在著時間掌控的問題。不少學生反應歡迎這種上課方式，但希望速度可以放慢一些。如何更精準地編寫教學劇本,使學習活動在不急不徐的節奏中順利進行,是我們接下來的任務。

陸、參考文獻

[1] S. Baley, J.M. Rabin (2016). *Students' Use of Computational Thinking in Linear Algebra*. International Journal of Research in Undergraduate Mathematics Education 2(1), 83-104.

[2] D. Bressoud et al. (2016). *Teaching and Learning of Calculus*. ICME-13 Topical Surveys, DOI 10.10071978-3-319-32975-8_1.

[3] A. Dorko, E. Weber (2014). *Generalising Calculus Ideas from Two Dimensions to Three: How Multivariable Calculus Students Think about Domain and Range*. Research in Mathematics Education. http://dx.doi.org/10.1080/14794802.2014.919873.

[4] E. Dubinsky. *Reflective Abstraction in Advanced Mathematical Thinking.*

[5] E. Dubinsky & M.A. McDonald (2012). *APOS: A Constructivist Theory of Learning in Undergraduate Mathematics Education Research.* In D. Holton (ed.). The teaching and learning of mathematics at university level: An ICMI study.

[6] H. Kashefi, Z. Ismail, Y.M. Yusof (2010). *Obstacles in the Learning of Two-variable Functions through Mathematical Thinking Approach,* International Conference on Mathematics Education Research 2010(ICMER 2010), Procedia Social and Behavioral Sciences 8, 173-180.

[7] S. Kerrigan (2015). *Student Understanding and Generalization of Functions from Single to Multivariable Calculus.* A project submitted to Oregon State University.

[8] R. Martinez-Planell, M.T. Gaisman (2009). *Students' Ideas on Functions of Two Variables: Domain, Range and Representations*, Porceedings of the 31th annual

meeting of the north American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education.

[9] R. Martinez-Planell, M. Trigueros, D. McGee (2015). *On Students' Understanding of the Differential Calculus of Functions of Two Variables*, Journal of Mathematical Behavior 38, 57-86.

[10] D. McGee & D. Moore-Russo (2015). *Impact of Explicit Presentation of Slopes in Three Dimensions on Students' Understanding of Derivatives in Multivariable Calculus*, To appear in International Journal of Science and Mathematics Education.

[11] M.T. Gaisman , R. Martinez-Planell,, D. McGee (2018). *Student Understanding of the Relation Between Tangent Plane and the Differential,* International Journal of Research in Undergraduate Mathematics Education, 4(1), 181-197.

[12] C.N. Nobre, M.R.G. Meireles, N.J.R. Vieira, N.C. Monica, E.R. Lucivania, C. Rejane (2016), *The Use of Geogebra Software as a Calculus Teaching and Learning Tool*, Informatics in Education 15(2), 253-267.

[13] A.W. Seneres, J.A. Kerrigan (2014). *Using Dynamic Software to Address Common College Calculus Stumbling Blocks*, Journal of Mathematics Education at Teachers College, 5(2), 29-37.

[14] D. Tall, R. Schwarzenberger (1978). *Conflicts in the Learning of Real Numbers and Limits.* Mathematics Teaching, 82, 44-49.

[15] M. Trigueros Gaisman, R. Martinez-Planell, D. McGee 2016. *Student Understanding of the Relation between Tangent Plane and the Differential*, https://indrum2016.sciencesconf.org/80074/document.

[16] D. Tall (1992). *Visualizing Differentials in Two and Three Dimensions*, Teaching Mathematics and Its Applications, 11(1), 1-7.

[17] M.F. Ocal (2017). *The Effect of Geogebra on Students' Conceptual and Procedural Knowledge*, Higher Education Studies 7(2), 67-78.

[18] D. Verzosa, A.F. Guzon, M.L. Antonette (2014). Using Dynamic Tools to Develop an Understanding of the Fundamental Ideas of Calculus. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 45(2), 190-199.

[19] L.S. Vygotsky (1978). *Mind in Society: The Development of Higher*

Psychological Process.Cambridge, MA: Harvard University Press.

[20] E.D. Weber (2012). *Students'Ways of Thinking about Two-Variables Functions and Rate of Change in Space*. Ph.D. Dissertation. Arizona State University.

[21] J.M. Wing (2006). *Computational Thinking,* Commu. *ACM*, *49*(3), 33-35.

[22] D. Wood, J. Bruner, G. Ross (1976). *The Role of Tutoring in Problem Solving*. Journal of Child Psychology and Psychiatry and Allied Disciplines, 17,89-100.

[23] 陳育琳 (2006). *數學同儕鷹架理論之發展與驗證*. 博士論文.

[24] 吳思慧、余啟哲、邱守榕 (2009). *電腦輔助多變數函數可微性的理解*，科學教育研究與發展季刊，52, 67-97。

[25] 黃志賢 (2011). *科技大學工程學生導數概念理解之研究*. Chinese Journal of Science Education, 19(6), 483-506.

[26] 謝州恩(2013). *鷹架理論的發展、類型、模式與對科學教學的啟示*，科學教育月刊，364,2-16.

[27] 余啟哲、吳思慧（2014）.*電腦輔助環境下大二數學系生重新建構多變數微分知識之個案研究*，科學教育研究與發展季刊，68, 49-76。

[28] 曾建銘 (2015). *運用 APOS 理論教學設計的認知診斷評量研究*. MOST 104-2511-S-656-003.

[29] 教育部(2016).運算思維推動計畫.

[30] 林震燦、陳裕益、楊菁菁(2018). *微積分中雙變數函數相關課題的三維教具開發之理念與成果*，高等教育研究紀要，8,17-18.