

線性樹狀結構機率模組之分析

Probabilistic Model Analysis for Linear Tree Structures

鍾斌賢⁺ 林聰武^{*} 徐金錚⁺

B. S. Jong T. W. Lin J. J. Shyu

⁺ 中原大學資訊工程學系

Department of Information and Computer Engineering, Chung-Yuan Christian University,
Chung-Li, Taiwan, R.O.C.

^{*} 東吳大學資訊科學系

Department of Information and Computer Science, Soochow University, Taipei, Taiwan,
R.O.C.

摘要

四元樹資料結構在電腦圖學、影像處理等領域中，扮演著非常重要的角色。由於指標四元樹使用『指標』做為運算時的媒介，雖然對降低時間複雜度助益不少，但是相對的造成空間複雜度增高的問題。線性四元樹也就因應此一問題而產生。

1982年Dyer提出指標四元樹在某種特殊情形下，所占記憶體的空間複雜度。然而，一般『隨機存取影像』而言，該理論無法適用。本論文將提出在一『機率模組』理論下所推導的結果。同時說明一般隨機影像中，使用線性結構較指標四元樹節省記憶體約60.66%~75.83%。

關鍵詞：指標四元樹、線性四元樹、機率模組、空間複雜度。

ABSTRACT

Quadtree data structure acts a very important role in the fields of computer graphics and image processing. As pointer-based quadtree makes use of "pointer" for a medium to operation, it is helpful to reduce time complexity during calculation. However, it still results in the problem of relatively increasing space complexity. Hence linear quadtree is proposed

to save memory space.

Dyer proposed a space complexity measurement of pointer-based quadtree in 1982. However, with common "random image" situation, that theory is not suitable. This paper will raise a premise under the theory of "probabilistic model" to reason out the results, and explain that, in average, linear structure can save about 60.66% ~ 75.83% percentage of memory than pointer-based quadtree.

keyword: Pointer-Based Quadtree, Linear Quadtree, Probabilistic Model, Space complexity

1. 緒論

階層式(Hierarchical)資料結構在電腦圖學、影像處理、計算幾何、圖形識別[1]、...等領域中，扮演著非常重要的角色。四元樹及八元樹即為此一階層式資料結構的代表性結構。它們最大的優點是很容易的便可以用來解決『布林運算』[5, 6]『旋轉』[4]、...等問題。

由於指標四元樹及指標八元樹必須用指標來處理父節點及子節點(Parent node and Son node)之間的關係，因此它浪費了許多不必要的記憶體空間。有鑑於此，不少改良式資料結構陸續被提出。其中，1982年Gargantini[3]所提出之線性四元

樹／線性八元樹的表示法，最為學者所認同。

1982年Dyer[2]提出關於指標四元樹在某種特殊情形下，所占記憶體空間的複雜度。然而其先決條件乃在『某一特定形狀及特定位置』。因此，以一般『隨機存取之影像』而言，該理論即無法適用。本論文將提出在一『機率模組』理論的前題下，所推導的結果。經由這些結果，證實指標四元樹確實占用太大空間，並說明在一般隨機影像中，使用線性結構較指標四元樹所節省記憶體的百分比。

本論文安排如下，第二節對專有名詞做一概要性定義，而指標四元樹的機率模組在第三節說明，以學理的角度，證明指標四元樹確實佔用太大空間。並進一步探討線性四元樹所能節省記憶體的百分比。實驗與討論列在第四節，最後一節為結論。

2. 基本定義

定義2.1 總體空間(Universe)簡寫為 Z^N ，為整數系(Z)的N度空間，它是由N個互相垂直的座標軸所構成。而U是N度空間內的部分區域，且 $0 \leq X(i) \leq e$ ，其中X(i)是在第i度空間的位移(Displacement)，e是總體空間每邊的邊長(每邊一定等長)，N是總體空間的階度(Order)[6]

例如：

1. 若 $n=2$ 時，為 Z^2 平面空間，U表示正方形，在U中座標以(X(1),X(2))來表示。
2. 在總體空間內某個點的座標以(X(1),X(2),...,X(n))來表示，總體空間的原點是在每個座標軸相交的點上。

定義2.2 我們用 $U_N(2^n)$ 來表示總體空間，其中N

是總體空間的階度， 2^n 是總體空間每邊的長度，通常n解釋為解析度參數(Resolution)。

例如：

某個2-D總體空間 $U_2(2^n)$ ，是指在 $[0, 2^n] * [0, 2^n)$

內定義一個大小為 $2^n * 2^n$ 的像素點(Pixel)陣列。所謂像素點是在二度空間內，二條垂直線相交所形成的單位正方形，它是組成物體的基本單位，這些像素點用0或1來表示，例如某個像素點為黑色則用1表示，否則為0。

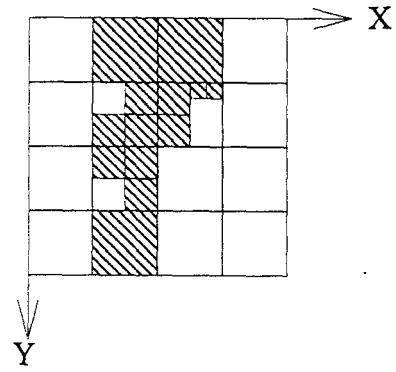


圖1：一個 $2^4 * 2^4$ 大小的總體空間

四元樹(Quadtree)是一種階層式資料結構，它的基本性質是將空間做遞迴分割。四元樹

通常是用來表示定義在 $U_2(2^n)$ 內的物體，形成四元樹的方法是把總體空間分割成大小一致的四分塊(Quadrant)，檢查每個四分塊是否有一致的顏色(整塊是黑或白)或達到解析度的要求(已切成像素點)，若滿足上述條件之一，則該四分塊不再分割，否則繼續把四分塊再切成四分塊、子四分塊...等，一直切到每個四分塊達到上述條件。例如在一個 $2^4 * 2^4$ 的總體空間，請參考圖1物體形狀與圖2四元樹。在四元樹中，每一個節點對應到一四分塊，其中根節點對應到整個總體空間。

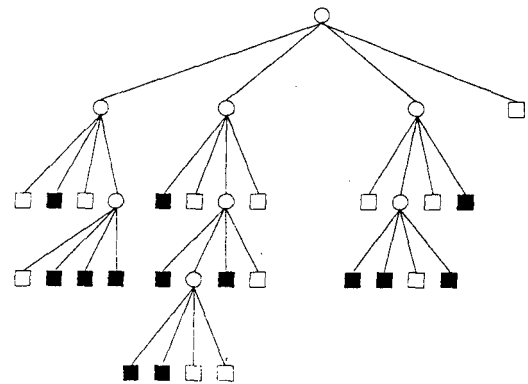


圖2：對應圖1的四元樹

從圖2的四元樹中，可找到四元樹的節點有二種：終端節點(leaf node)與非終端節點(non-leaf node)，終端節點表示不可分割的四分塊為黑色或白色。非終端節點又稱為灰色節點，因為該節點所對應的四分塊顏色不一致。通常灰色節點有指標指到父節點與子節點。灰色節點被切成四個子分塊，這四個子四分塊分別被標上NW、NE、

SW、SE，四個邊界稱為N、E、S、W。通常這四個邊界也被用做方向指示（請參考圖3）。

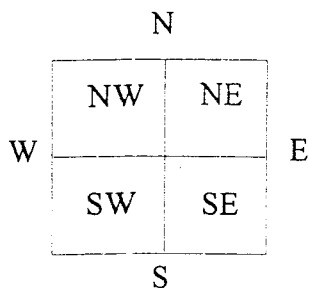


圖3：子四分塊與其四個邊的關係

同理八元樹是對 $U_3(2^n)$ 作遞迴分割，也就是說每次分割時，切成八個八分塊，以表達三度空間物體[10]。由於八元樹以及線性八元樹之基本定義及原理與四元樹及線性四元樹相似，我們不再詳加探討。

定義 2.3 在四元樹中，樹根在第 n 層樹階 (Tree Level)，一個像素點在第 0 層。若有一節點在第 i 層時，該節點到根節點的距離為 $n-i$ 。在第 i 層對應到的四分塊大小為 $2^i * 2^i$ 。樹根為第 n 層，則我們將此四元樹樹高 (Tree Height) 定為 n 。

樹狀結構必須浪費許多記憶體空間來存放指標。為解決大多數指標閒置不用又佔記憶體的情形，Gargantini[3] 發現只需記錄四元樹的黑色節點，仍能保留四元樹的基本性質，這種利用線性結構來表示的四元樹稱為線性四元樹。把四元樹之子四分塊編碼成下列之位置碼：NW=0、NE=1、SW=2、SE=3。然後利用前序追蹤法 (Preorder Traversing) 來追蹤整棵四元樹。終端節點的編碼方式是把該節點所經路徑之位置碼收集起來。如果終端節點在第 i 層，則編碼停在 $(n-i)$ 個數字上 (由左至右)，其餘補上 X 標記。

定義 2.4 線性四元樹必須滿足下列條件：

已知 $L = \langle N_1, N_2, \dots, N_k \rangle$ 為線性四元樹內的所有四元碼，則

1. $N_i < N_{i+1}, 1 \leq i \leq k-1$
2. $1 \leq i, j \leq k, i \neq j, N_i \cap N_j = \emptyset$

此處交集是指正規集運算 (Regular Set Operations)

指標四元樹有以下的特性：

- (a) 任何影像或物體均可由四分塊構成，此種表示法，可以當作是原來像素或點陣列之聚凝 (coherence)。
- (b) 位置、距離、鄰居等幾何特性，仍然被保留在結構內。
- (c) 依照樹的層次，可以將物體表示出不同的解析度。
- (d) 許多高效率的樹的追蹤方法，提供快速的運算，使得布林運算、面積、周長的計算... 等應用變得非常容易。
- (e) 四元樹的計算方法用不著浮點運算，整數乘法及除法。

指標四元樹有以下的缺點：

- (a) 樹狀表示法與物體的位置、方向及大小有很大關係。也就是說，稍為改變一下這些參數，將造成樹的結構與原來的不同。
- (b) 每個灰色節點需要很多指標，它佔用許多記憶空間，而且依據層次的增加，成指數成長。
- (c) 由於需要龐大的空間儲存其結構，因此在有限的主記憶體內，無法完整地儲存，往往必須儲存於磁碟內，因此引起大量的頁輸入及輸出。

線性四元樹有以下的特性：

- (a) 編碼方式是由指標四元樹樹根，依前序追蹤法，追蹤至終止節點。
- (b) 依照編碼由小到大，儲存於陣列內。僅儲存黑色節點，沒有指標。
- (c) 可以很容易的將線性樹狀結構轉換成指標樹狀結構。
- (d) 編碼的空間與時間複雜度和黑色節點成正比。
- (e) 提供快速的運算，使得布林運算、面積、周長的計算... 等應用變得非常容易。

線性四元樹有以下的缺點：

- (a) 缺乏指標，許多用到找鄰居的計算方法變得沒有效率。
- (b) 線性樹狀結構之黑色節點與物體的位置有很大關係，因此，一些幾何轉換方法變得較為複雜。
- (c) 對於涉及鄰居或某特殊節點需拜訪時，如利用二元搜尋 (Binary Search) 方法作為尋找工具時。在時間複雜度上必須乘以 $\log(B)$ (B 為黑色節點數)，而最後結果輸出之線性四元樹亦必須符合四元樹前序追蹤排列方式。

有關線性四元樹之缺點，有許多位學者提出因應

之道[8, 9, 10]。

3. 四元樹的機率模組

1982年Dyer[2]以一個方塊在總體空間的位置，討論指標四元樹儲存空間的複雜度。1991年Jong[10]討論在最壞情況下(Worst Case)指標四元樹空間的複雜度，及其與線性四元樹空間複雜度的比較。然而，在一個應用系統的影像檔中，絕大部分的影像檔不是方塊所組成，也並非完全類似棋盤似的結構。因此，從一個實際應用的角度來看，以上兩種理論都不適合。在這一節中，我們試著建立一個『數學模組』，並將我們演繹的結果與實驗觀測值加以比較，借以驗證我們的理論。

大體上，數學模組可分為確定模組(Deterministic Model)及機率模組(Probabilistic Model)二種[7]。前者乃指一試驗之條件完全決定其結果，而後者指一試驗之條件僅決定其結果的機率行為(Probabilistic Behavior)。由於一系統的資料檔屬於隨機模組，所以我們採用後者，利用此一模組說明指標四元樹及線性四元樹空間複雜度機率分配的情形。

當指標四元樹樹高(tree height)為1時，在樹階為0的位置，黑色節點(Black Node)可能佔有四個終端節點(Terminal Node)的一半。亦即黑色節點的佔有率與白色節點(White Node)的佔有率各為50%，而灰色節點(Gray Node)則為0%。

在一個 $U_2(2^n)$ 的總體空間上，把指標四元樹所有可能組合的情形列出，將發現一個事實：愈接近根節點，灰色節點在該樹階的佔有率，將相對的提高。而且當樹高(Tree Height)愈大時，情形愈明顯。相對的，終端節點(即黑色與白色節點)在較高階處的出現機率將相對的降低。在本論文中我們假設出現機率與佔有率是同意。

根據以上的觀察，如果能夠找到在每一樹階中，各種節點的佔有率，則可以求出在統計規律下，指標四元樹節點的分配情形。

定義3.1 在 $U_2(2^n)$ 的總體空間中，定義

$Tree(i)$ =當樹高為 i 時可能出現各種樹狀情形的總數。

定理3.1 觀察 $U_2(2^n)$ 的總體空間，當指標四元樹樹高為 n 時，所有可能出現的樹狀結構，其總數為：

$$Tree(n) = \sum_{i=0}^3 \binom{4}{i} \sum_{j=1}^{4-i} \binom{4-i}{j} [Tree(n-1)]^j, n \geq 2,$$

$$Tree(1)=14$$

當 $n=1$ 時，表示樹高為1，亦即除根節點外，尚有4個子節點此4個子節點僅含黑或白色節點，同時不能全部為黑色或白色節點，故共有 $2^4 - 2 = 14$ 種不同組合的樹狀結構。定理3.1可解釋為取 i

個黑色節點時，共有 $\binom{4}{i}$ 種情況，然後取 i 個灰色

節點時，共有 $\binom{4-i}{j}$ 種情況，且灰色節點可再遞迴產生子四元樹。

以上是以機率組合的情形探討樹狀節點可能出現的情形，我們亦可使用下列公式輔助說明：

輔助定理3.1 觀察 $U_2(2^n)$ 的總體空間，當指標四元樹樹高為 n 時，所有可能出現樹的情況，其總數為：

$$Tree(n) = 2^{2^{2^n}} - 2^{2^{2^{(n-1)}}}, n \geq 1$$

證明：

假設在 $U_2(2^n)$ 的總體空間中，每個像素可能為黑色或白色，故樹高為 $0, 1, 2, \dots, n$ 時，所有可能出現樹的總數為

$$\sum_{i=0}^n Tree(i) = 2^{2^{2^n}}$$

$$Tree(n) = 2^{2^{2^n}} - \sum_{i=0}^{n-1} Tree(i)$$

$$\sum_{i=0}^{n-1} Tree(i) = 2^{2^{2^{(n-1)}}}, n \geq 1$$

$$Tree(n) = 2^{2^{2^n}} - 2^{2^{2^{(n-1)}}}, n \geq 1$$

定義3.2 在 $U_2(2^n)$ 的總體空間，定義

$T(A_n)$ =在樹階 $n-1$ 中，該 A 種節點在不同組

合情形下，出現節點的總數。

$P(A_n)$ = 在樹階 $n-1$ 中，該 A 種節點在不同組合情形下的佔有率。

在本論文中，我們將以 B 代表黑色節點，W 代表白色節點，G 代表灰色節點。

定理 3.2 觀察 $U_2(2^n)$ 的總體空間，當指標四元樹樹高為 n 時，在樹階 $n-1$ 處 ($n \geq 1$)，其

$$\text{黑色節點的佔有率 } P(B_n) = \frac{1}{2^{2^{2(n-1)}}}$$

$$\text{白色節點的佔有率 } P(W_n) = \frac{1}{2^{2^{2(n-1)}}}$$

$$\text{灰色節點的佔有率 } P(G_n) = 1 - [2 * \frac{1}{2^{2^{2(n-1)}}}]$$

證明：

根據定理 3.1

$$\text{Tree}(n) = \sum_{i=0}^3 \binom{4}{i} \sum_{j=1}^{4-i} \binom{4-i}{j} [\text{Tree}(n-1)]^j, n \geq 2, \\ T(1) = 14$$

$$T(B_n) = \sum_{i=0}^3 i * \binom{4}{i} \{ \sum_{j=1}^{4-i} \binom{4-i}{j} [\text{Tree}(n-1)]^j \}, n \geq 2 \\ = 48 * [\text{Tree}(n-1)] + 24 * [\text{Tree}(n-1)]^2 + 4 * [\text{Tree}(n-1)]^3$$

同理

$$T(W_n) = \sum_{i=0}^3 \binom{4}{i} \{ \sum_{j=1}^{4-i} (4-i-j) * \binom{4-i}{j} [\text{Tree}(n-1)]^j \}, n \geq 2,$$

$$T(G_n) = \sum_{i=0}^3 \binom{4}{i} \{ \sum_{j=1}^{4-i} j * \binom{4-i}{j} [\text{Tree}(n-1)]^j \}, n \geq 2,$$

$$\text{已知 } P(B_n) = P(W_n) = \frac{T(B_n)}{T(B_n) + T(W_n) + T(G_n)}$$

根據輔助定理 3.1，極限收斂為

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(B_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\text{Tree}(n-1)} = \frac{1}{2^{2^{2(n-1)}}}$$

同理

$$P(W_n) = \frac{1}{2^{2^{2(n-1)}}}, n \geq 1$$

$$P(G_n) = 1 - [2 * \frac{1}{2^{2^{2(n-1)}}}], n \geq 1$$

由定理 3.2 可以發現，在 $U_2(2^n)$ 的總體空間中，當指標四元樹樹高愈大時，在樹階為 $n-1$ 中，灰色節點的佔有率將隨之愈大。例如：

$$P(G_1) = 0.0\%$$

$$P(G_2) = 87.52\%$$

$$P(G_3) = 99.98\%$$

定理 3.3 觀察 $U_2(2^n)$ 的總體空間，當指標四元樹樹高為 n 時，在樹階為 i 的灰色節點佔有率為

$$1 - [\frac{1}{2^{(2^{2^i-1})}}], i = 1, 2, \dots, n-1$$

證明：

由定理 3.2 知，指標四元樹在樹階為 $n-1$ 處，其灰色

節點的佔有率為 $1 - [2 * \frac{1}{2^{2^{2(n-1)}}}]$ ，一棵樹高為 n 的

指標四元樹，假設樹階為 i 的灰色節點共有 K 個 (K 為常數)，則樹階為 $(i-1)$ 的各種節點個數為 $K * [T(B_i) + T(W_i) + T(G_i)]$ 。同理，灰色節點的總

數為 $K * T(G_i)$ ，其佔有率為 $\frac{T(G_i)}{T(B_i) + T(W_i) + T(G_i)}$ ，依此推論，可得在樹階為 i 處灰色節點的佔有率為

$$1 - [\frac{1}{2^{(2^{2^i-1})}}], i = 0, 1, 2, \dots, n-1。$$

輔助定理 3.2 觀察 $U_2(2^n)$ 的總體空間，當指標四元樹樹高為 n 時，在樹階為 i 的黑色節點(或白色節

點)佔有率為 $[\frac{1}{2^{2^i}}]$ ， $i = 1, 2, \dots, n-1$ 。

我們將利用機率模組的概念討論指標四元樹中各種節點個數的估計值，求出各種節點個數的

最大下界 (Lower Bound) 及最小上界 (Upper Bound)。

輔助定理3.3

1. $\sum_{i=0}^S \binom{S}{i} * k^i = (k+1)^S$
2. $t * \binom{S}{t} = S * \binom{S-1}{t-1}$
3. $TN(n) = NN(n) + 1$

其中 $TN(n)$ 表示在樹高為 n 的指標四元樹中，節點個數總和。 $NN(n)$ 表示在樹高為 n 的指標四元樹中，樹階 $0 \sim n-1$ 的節點個數總和，亦即不含根節點。

定理3.4 在一 $U_2(2^n)$ 的總體空間中，指標四元樹節

點個數總和為 $\frac{13}{16} * 2^{2n} + 1 < TN(n) < \frac{4}{3} * 2^{2n} - \frac{1}{3}$

證明：

由樹階 $n-1$ 的組合情形，討論 $NN(n)$

$$\begin{aligned}
 NN(n) &= \sum_{i=0}^4 \binom{4}{i} [P(B_n) + P(W_n)]^i [P(G_n)]^{4-i} * [TOTAL-SUM] \\
 &= 4 * [P(B_n) + P(W_n)]^4 \\
 &= \sum_{i=0}^4 \binom{4}{i} [2 * (\frac{1}{2})^{2^{2(n-1)}}]^i [1 - 2 * (\frac{1}{2})^{2^{2(n-1)}}]^{4-i} * \\
 & \quad [4 + (4-i)NN(n-1)] - 4 * [2 * (\frac{1}{2})^{2^{2(n-1)}}]^4
 \end{aligned}$$

經計算得：

$$NN(n) = 4 * [1 - 2^4 * (\frac{1}{2})^{2^{2n}}] + 4 * [1 - 2 * (\frac{1}{2})^{2^{2(n-1)}}] * NN(n-1)$$

整理上式，可得以下二個範圍：

(a) $NN(n) < 2^2 + 2^2 * NN(n-1)$, $NN(1) = 4$, $n > 1$

(b) $NN(n) > 4 * [1 - 2 * (\frac{1}{2})^{2^{2(n-1)}}] * NN(n-1)$,

也就是說

(a) $NN(n) < 2^2 + 2^2 * NN(n-1)$, $NN(1) = 4$, $n > 1$

$$\rightarrow NN(n) < \frac{4}{3} * 2^{2n} - \frac{4}{3}$$

$$\therefore TN(n) = NN(n) + 1 < \frac{4}{3} * 2^{2n} - \frac{1}{3}$$

(b) $NN(n) > 4 * [1 - 2 * (\frac{1}{2})^{2^{2(n-1)}}] * NN(n-1)$, $NN(1) = 4$

$$\begin{aligned}
 \rightarrow NN(n) &> 4^{n-1} * NN(1) * \prod_{i=1}^{n-1} [1 - 2 * (\frac{1}{2})^{2^{2i}}] \\
 &> 4^n * [1 - 3 * (\frac{1}{4})^4] + 1 \\
 &= \frac{13}{16} * 2^{2n} + 1
 \end{aligned}$$

綜合(a)、(b)得

$$\frac{13}{16} * 2^{2n} + 1 < TN(n) < \frac{4}{3} * 2^{2n} - \frac{1}{3}$$

定理3.5 在一 $U_2(2^n)$ 的總體空間中，指標四元樹

黑色節點個數總和為 $\frac{13}{32} * 2^{2n} < TB(n) < \frac{1}{2} * 2^{2n}$

證明：

假設在樹階 $n-1$ 選 i 個黑色節點， j 個灰色節點， $(4-i-j)$ 個白色節點。

$$\begin{aligned}
 NB(n) &= \sum_{i=0}^4 \sum_{j=0}^{4-i} \binom{4-i}{j} [P(B_n)]^i * [P(G_n)]^j * [P(W_n)]^{4-i-j} * \\
 & \quad [i+jNB(n-1)] - 4 * [P(B_n)]^4
 \end{aligned}$$

證明方法同定理3.4, 可得 $\frac{13}{32} * 2^{2n} < TB(n) < \frac{1}{2} * 2^{2n}$

由定理3.5 可說明線性四元樹之空間複雜度。

定理3.6 在一 $U_2(2^n)$ 的總體空間中，指標四元樹灰

色節點個數總和為 $\frac{7}{32} * 2^{2n} + 1 < TG(n) < \frac{29}{96} * 2^{2n} - \frac{1}{3}$ 。

定理3.6 可用 $NB(n) = \sum_{i=0}^4 \sum_{j=0}^{4-i} \binom{4-i}{j} [P(B_n)]^i * [P(G_n)]^j * [P(W_n)]^{4-i-j} * [i+jNB(n-1)]$ 推導而得

定理3.7 在一 $U_2(2^n)$ 的總體空間中，指標四元樹樹

高欲達到 n 其機率值大於 81.2%

證明：

根據定理3.1.3

$$P(G_n) = \prod_{i=2}^n [1 - 2 * (\frac{1}{2})^{2^{i-1}}]$$

$$= [1 - 2 * (\frac{1}{2})^{2^{n-1}}] * \dots * [1 - 2 * (\frac{1}{2})^{2^2}]$$

$$> 1 - 3 * (\frac{1}{2})^{2^2}$$

$$\cong 81.2\%$$

定理3.8 在一 $U_2(2^n)$ 的總體空間中,線性四元樹在

記憶體上較指標四元樹節省約60.66%~75.83%
證明:

(a) 指標四元樹:

指標四元樹中,每一灰色節點需存一個父節點、四個子節點,因此需要 $5 * (2n+1)$ 個位元。而黑色節點(或白色節點)則只須存一個父節點和本身的顏色,因此需要 $(2n+1)+1$ 個位元。

根據前節結果可知: $\frac{13}{32} * 2^{2n} < TB(n) < \frac{1}{2} * 2^{2n}$,

$$\frac{13}{32} * 2^{2n} < TW(n) < \frac{1}{2} * 2^{2n}, \quad \frac{7}{32} * 2^{2n} + 1 < TG(n) < \frac{29}{96} * 2^{2n} - \frac{1}{3}$$

我們以 Tb 表示所需之位元總數,

$$Tb < (10n+5) * (\frac{29}{96} * 2^{2n} - \frac{1}{3}) + 2 * (2n+2) * (\frac{1}{2} * 2^{2n})$$

$$= \frac{121}{24} * n * 2^{2n} - \frac{337}{96} * 2^{2n} - \frac{10}{3} * n - \frac{5}{3}$$

$$Tb > (10n+5) * (\frac{7}{32} * 2^{2n} + 1) + 2 * (2n+2) * (\frac{13}{32} * 2^{2n})$$

$$= \frac{61}{16} * n * 2^{2n} + \frac{61}{32} * 2^{2n} + 10n + 5$$

(b)線性四元樹:

線性四元樹中,每個數字需要3個位元表示,2個位元代表四進位數,1個位元代表X。由於四元碼不可能由X開始,所以每個四元碼需要 $3 * (n-1) + 2$ 個位元。即

$$Tb' < [3 * (n-1) + 2] * (\frac{1}{2} * 2^{2n})$$

$$= \frac{3}{2} * n * 2^{2n} - \frac{1}{2} * 2^{2n}$$

$$Tb' > [3 * (n-1) + 2] * (\frac{13}{32} * 2^{2n})$$

$$= \frac{39}{32} * n * 2^{2n} - \frac{13}{32} * 2^{2n}$$

根據(a)、(b)可知 $(Tb'/Tb) < 39.34\%$ 節省約60.66%;
 $(Tb'/Tb) > 24.17\%$ 節省約75.83%故線性四元樹在記憶體上較指標四元樹節省約60.66%~75.83%。

4. 實驗與討論

本節將就第3節的理論結果做一隨機性抽樣調查,抽樣結果整理於表1中,由表中數據可驗證我們的理論。

檔案名稱	檔案1	檔案2	檔案3	檔案4
白色像素點	29014	35538	29925	38869
黑色像素點	36522	28998	26248	26667
像素總和	65536	65536	65536	65536
灰色節點數	20711	18711	19765	18168
白色節點數	34053	27384	31699	26553
黑色節點數	28081	28753	27600	27952
節點總和	82845	74848	79064	72673

表1: 抽樣實驗之結果(影像)

由於我們的理論基礎,係架構於『一個像素(Pixel)落於總體空間任一位置的機率值均相等』,因此對於含有人為因素造成的影像將不包含於我們的理論中。例如:刻意將影像極端的模糊化、一般的線條文字、線段構成的表格、...等。

檔案名稱	檔案A	檔案B	檔案C	檔案D
白色像素點	48335	52416	36781	58367
黑色像素點	17201	13120	28755	7169
像素總和	65536	65536	65536	65536
灰色節點數	8311	6420	5420	3109
白色節點數	11354	8440	8136	3836
黑色節點數	13583	10824	8128	5495
節點總和	33248	25684	21684	12440

表2: 抽樣實驗之結果(文字與圖形)

因此,我們考慮在許多計算機圖學、影像處理的應用中,黑色節點具有聚凝(Coherence)的趨勢,它使得像素得以遞迴性的合併成爲一個較大的節點,使得空間複雜度大爲減少,利用此一行爲模式,突顯出指標四元樹的優越特性,除了在空間複雜度上表現此一優點外,在運算過程中亦因此而降低了時間複雜度。我們同樣掃描了一些文字與圖形並將結果列於表2。由此看來,指標四元樹仍有其研究的價值。

5. 結論

本篇論文中，我們以機率學上常使用之機率模組證實指標四元樹空間複雜度的問題，同時我們亦證實線性四元樹亦有相同的空間複雜度。從實用的角度來看，我們證實了使用線性四元樹將比指標四元樹節省約60.66%至75.83%之記憶體空間，此事實證明使用線性四元樹的優點。在同樣的理論基礎，我們亦可以很容易推導出線性八元樹與指標八元樹的關係。

雖然在『隨機』情況下，使用指標樹狀結構與使用線性樹狀結構有相同的空間複雜度，但是我們亦由實驗中證實大部分的圖學影像均具有凝聚的特性，故以四元樹及八元樹為物體資料結構之實體模組(Solid Modelling)仍有其研究的價值。

線性樹狀結構比指標樹狀結構節省許多記憶體空間，但是因『指標』的失去，使得演算法無法較指標樹那麼的直覺，而且許多線性樹之演算法的時間複雜度亦比指標樹差。近年來許多線性樹的線性時間演算法陸續被提出[Jong91, Shaf91, Webb92]，他們解決了線性樹的最大瓶頸，而且這些演算法均是利用模擬指標樹的追蹤(Tree Traverse)、邊界追蹤(Border following)及雜序(Hashing)等技巧，來完成線性時間解，故我們未來將研究建立一個線性模型，以便解決線性樹之線性時間解的問題。

參考文獻

- [1] C.H. Chien, J.K. Aggarwal, A Normalized Quadtree Representation, *Comput. Vision Graphics Image Process*, Vol. 26, pp.331-346, 1984.
- [2] C.R. Dyer, The Space Efficiency of Quadtrees, *Computer Graphics and Image Processing*, Vol. 19,4, pp.335-348, 1982.
- [3] I.Gargantini, An Effective Way to Represent Quadtrees, *Commum, ACM*, Vol.25, No.12, Dec, pp.995-910, 1982.
- [4] I.Gargantini, T.R.Walsh and L.O.Walsh, Viewing Transformationations of Voxel-Based Objects via Linear Octrees, *IEEE CGA*, 10, pp.12-21, 1986.
- [5] G.M.Hunter and K.Steiglitz, Operations on images using quadtrees. *IEEE Trabsactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence PAMI-1*, pp.145-153, 1979.
- [6] D.Meagher, Geometric Modelling Using Octree Encoding, *Computer Grapics and Image Processing*, Vol.19, 1, pp.129-147, 1982.
- [7] P.L.Meyer, *Introductory Probability and Statistical Applications*, Addison-Wesley, pp.1-18, 1965.
- [8] C.A.Shaffer and Q.F.Stout, Linear Time Distance Transforms for Quadtrees, *Computer. Vision Graphics Image Process: image understanding*, Vol.54, NO.2, 9, pp.215-231, 1991.
- [9] R.E.Webber and Hanan Samet, Linear-Time Border-Tracing Algorithms for Quadtrees, *Algorithmica*, Vol.8, pp.39-54, 1992.
- [10] 鍾斌賢，立體模組之線性四元樹及線性八元樹之研究，國科會計畫專題研究報告，計畫編號NSC 79-0408-E003-03, pp.51-70, 1991.